

# Probabilidad

## Cuaderno de Ejercicios

Airam Blancas

27 de agosto de 2026

### Índice

|                                                                  |           |
|------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Prefacio</b>                                                  | <b>4</b>  |
| <b>0. Nociones básicas de matemáticas</b>                        | <b>5</b>  |
| 0.1. Álgebra, exponentes e integrales . . . . .                  | 5         |
| 0.2. Vectores y matrices . . . . .                               | 6         |
| <b>1. Espacios muestrales y el concepto de probabilidad</b>      | <b>8</b>  |
| 1.1. Comprensión teórica . . . . .                               | 8         |
| 1.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                   | 9         |
| 1.3. Planteamiento y modelación . . . . .                        | 10        |
| <b>2. Probabilidad condicional e independencia</b>               | <b>13</b> |
| 2.1. Comprensión teórica . . . . .                               | 13        |
| 2.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                   | 13        |
| 2.3. Planteamiento y modelación . . . . .                        | 14        |
| <b>3. Autoevaluación. Fundamentos de probabilidad</b>            | <b>17</b> |
| 3.3. Planteamiento y modelación . . . . .                        | 17        |
| <b>4. Funciones de masa, densidad y distribución</b>             | <b>19</b> |
| 4.1. Comprensión teórica . . . . .                               | 19        |
| 4.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                   | 20        |
| 4.3. Planteamiento y modelación . . . . .                        | 21        |
| <b>5. Variables aleatorias discretas y continuas importantes</b> | <b>23</b> |
| 5.1. Comprensión teórica . . . . .                               | 23        |
| 5.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                   | 23        |
| 5.3. Planteamiento y modelación . . . . .                        | 24        |
| <b>6. Características numéricas de una variable aleatoria</b>    | <b>26</b> |
| 6.1. Comprensión teórica . . . . .                               | 26        |
| 6.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                   | 26        |
| 6.3. Planteamiento y modelación . . . . .                        | 28        |

|                                                                                     |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>7. Función generadora de momentos y transformaciones de variables aleatorias</b> | <b>32</b> |
| 7.1. Comprensión teórica . . . . .                                                  | 32        |
| 7.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 32        |
| 7.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 35        |
| <b>8. Autoevaluación. Variables aleatorias</b>                                      | <b>36</b> |
| 8.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 36        |
| <b>Respuestas</b>                                                                   | <b>38</b> |
| <b>0. Nociones básicas de matemáticas</b>                                           | <b>38</b> |
| 0.1. Álgebra, exponentes e integrales . . . . .                                     | 38        |
| 0.2. Vectores y matrices . . . . .                                                  | 38        |
| <b>1. Espacios muestrales y probabilidad</b>                                        | <b>39</b> |
| 1.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 39        |
| 1.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 39        |
| <b>2. Probabilidad condicional e independencia</b>                                  | <b>40</b> |
| 2.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 40        |
| 2.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 41        |
| <b>3. Autoevaluación. Fundamentos de probabilidad</b>                               | <b>42</b> |
| 3.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 42        |
| <b>4. Funciones de masa, densidad y distribución</b>                                | <b>42</b> |
| 4.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 42        |
| 4.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 43        |
| <b>5. Variables aleatorias discretas y continuas importantes</b>                    | <b>44</b> |
| 5.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 44        |
| 5.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 44        |
| <b>6. Características numéricas de una variable aleatoria</b>                       | <b>45</b> |
| 6.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 45        |
| 6.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 46        |
| <b>7. Función generadora de momentos y transformaciones de variables aleatorias</b> | <b>47</b> |
| 7.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 47        |
| 7.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 48        |
| <b>8. Autoevaluación. Variables aleatorias</b>                                      | <b>48</b> |
| 8.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 48        |
| <b>Soluciones</b>                                                                   | <b>50</b> |
| <b>0. Nociones básicas de matemáticas</b>                                           | <b>50</b> |
| 0.1. Álgebra, exponentes e integrales . . . . .                                     | 50        |
| 0.2. Vectores y matrices . . . . .                                                  | 51        |

|                                                                                     |           |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1. Espacios muestrales y probabilidad</b>                                        | <b>52</b> |
| 1.1. Comprensión teórica . . . . .                                                  | 52        |
| 1.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 54        |
| 1.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 56        |
| <b>2. Probabilidad condicional e independencia</b>                                  | <b>60</b> |
| 2.1. Comprensión teórica . . . . .                                                  | 60        |
| 2.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 62        |
| 2.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 62        |
| <b>3. Autoevaluación. Fundamentos de probabilidad</b>                               | <b>66</b> |
| 3.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 66        |
| <b>4. Funciones de masa, densidad y distribución</b>                                | <b>68</b> |
| 4.1. Comprensión teórica . . . . .                                                  | 68        |
| 4.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 70        |
| 4.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 71        |
| <b>5. Variables aleatorias discretas y continuas importantes</b>                    | <b>73</b> |
| 5.1. Comprensión teórica . . . . .                                                  | 73        |
| 5.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 74        |
| 5.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 76        |
| <b>6. Características numéricas de una variable aleatoria</b>                       | <b>78</b> |
| 6.1. Comprensión teórica . . . . .                                                  | 78        |
| 6.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 79        |
| 6.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 81        |
| <b>7. Función generadora de momentos y transformaciones de variables aleatorias</b> | <b>84</b> |
| 7.1. Comprensión teórica . . . . .                                                  | 84        |
| 7.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 85        |
| 7.3. Planteamiento y modelación . . . . .                                           | 87        |
| <b>8. Autoevaluación. Variables aleatorias</b>                                      | <b>88</b> |
| 8.2. Cálculo y operaciones numéricas . . . . .                                      | 88        |

## Prefacio

Desde que asumí la coordinación del curso de Probabilidad (EST-11101), en agosto de 2022, he buscado actualizar los recursos disponibles e incorporar nuevas herramientas con el propósito de favorecer el aprendizaje de la materia.

Este documento reúne una selección de ejercicios provenientes de las sesiones de ejercicios del curso, usualmente llamadas «laboratorios», impartidas en distintos periodos entre el otoño de 2022 y la primavera de 2025 por Arturo González Luna, Fernando Pérez Millán, Fernanda Enrica Beteta Bazán y Jorge Rodrigo Dávalos González Plata. También se incluyen ejercicios del Cuaderno de ejercicios de Probabilidad, elaborado por el profesor Ernesto Barrios.

Los ejercicios han sido revisados y reorganizados para aproximarlos al formato y al nivel de dificultad de las evaluaciones del curso. Trabajarlos con atención, comprender las herramientas que requieren y ser capaz de resolver problemas similares constituye una preparación adecuada para aprobar la materia. Sin embargo, este material no pretende anticipar todas las preguntas que pueden aparecer en una evaluación ni sustituye el estudio de la teoría, la participación en clase y la práctica constante.

Memorizar el procedimiento de ejercicios específicos genera una falsa sensación de preparación y resulta insuficiente cuando cambian los datos, el planteamiento o la herramienta necesaria. Por ello, antes de buscar más ejercicios, conviene asegurarse de comprender y poder resolver de manera autónoma los que aquí se presentan.

Si logras identificar cualquier tipo de error, o tienes alguna sugerencia, agradezco de antemano hacerlas llegar a través de la dirección electrónica <airam.blancas at itam.mx>.

Airam Blancas

## 0. Nociones básicas de matemáticas

Las siguientes herramientas se utilizarán de manera constante en el curso. Es importante poder realizar estos ejercicios con seguridad, sin depender de un procedimiento memorizado.

### 0.1. Álgebra, exponentes e integrales

1. Despeja la variable indicada.

a) Despeja  $x$  en  $3x - 7 = 11$ .

b) Despeja  $x$  en  $2(x - 3) = 5x + 6$ .

c) Despeja  $p$  en  $q = \frac{p}{1 - p}$ .

d) Despeja  $x$  en  $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$ , donde  $\sigma \neq 0$ .

e) Despeja  $t$  en  $y = e^{2t+1}$ , donde  $y > 0$ .

2. Simplifica las siguientes expresiones usando las leyes de los exponentes.

a)  $\frac{x^7 x^{-3}}{x^2}$ .

b)  $(a^2 b^{-1})^3$ .

c)  $\frac{e^{3x+2}}{e^x}$ .

d)  $e^{2 \log(x)}$ , donde  $x > 0$ .

e)  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3$ .

3. Si  $a < 0$ , simplifica las siguientes expresiones:

$$|a|, \quad |-a|, \quad |2a - 1|.$$

4. Realiza las siguientes sumas utilizando el formulario del curso.

a)  $\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$ .

b)  $\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots$ .

c)  $1 + 2 + 3 + \cdots + 105$ .

5. Calcula las siguientes integrales.

a)  $\int_0^4 (3 + x) dx$ .

b)  $\int_{-2}^3 5 dx$ .

c)  $\int_0^2 (4x^3 - 2x + 1) dx$ .

d) Si  $\mu \in \mathbb{R}$ , calcula

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|} dx.$$

e)  $\int_{-2}^2 x^2 |x-1| dx.$

6. Calcula las siguientes derivadas.

a) Sea  $f$  una función derivable y  $g(x) = f(x^2)$ . Calcula  $g'(x)$ .

b) Deriva  $xe^{3x+2}$  con respecto a  $x$ .

c) Deriva  $(x^2 + 1)e^{-x}$  con respecto a  $x$ .

## 0.2. Vectores y matrices

1. Considera

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calcula  $Ax$ .

2. Considera

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calcula  $By$ .

3. Considera

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calcula  $Cz$ .

4. Considera

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calcula  $Dw$ .

5. Calcula los siguientes productos de matrices.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Calcula la transpuesta de las siguientes matrices.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

7. Calcula los siguientes productos internos.

a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

8. Calcula la inversa de la matriz

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Después, verifica tu resultado multiplicando la matriz por su inversa.

9. Calcula

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

# 1. Espacios muestrales y el concepto de probabilidad

## 1.1. Comprensión teórica

1. Explica la diferencia entre un fenómeno aleatorio y un fenómeno determinístico.
2. Considera el rendimiento de un portafolio de inversión. Discute si puede considerarse un fenómeno aleatorio. En caso afirmativo, indica sus principales fuentes de incertidumbre.
3. Considera el número de transacciones fallidas durante un día en una plataforma de comercio electrónico. ¿Puede considerarse un fenómeno aleatorio? En caso afirmativo, indica sus principales fuentes de incertidumbre.
4. Analiza la tasa de desempleo de un país durante un periodo de recesión económica. ¿Es un fenómeno aleatorio o determinístico? Justifica tu respuesta.
5. Un emprendedor lanza un nuevo producto al mercado. ¿La aceptación del producto por parte de los consumidores es un fenómeno aleatorio? Explica cuáles serían las fuentes de incertidumbre.
6. Clasifica los siguientes fenómenos como aleatorios o determinísticos. Justifica cada respuesta.
  - a) La tasa de inflación durante un periodo determinado.
  - b) El tiempo de procesamiento de una transacción bancaria.
  - c) El tiempo que tarda un automóvil de 900 kg en recorrer 5 km a una velocidad constante de 50 km/h, en ausencia de fuerzas de resistencia.
  - d) El resultado de la bolsa de valores al cierre de un día.
  - e) La temperatura de ebullición del agua bajo una presión atmosférica determinada.
7. Sean  $A$  y  $B$  dos eventos de un mismo espacio muestral. Explica con tus propias palabras qué significa cada uno de los siguientes eventos:
  - a)  $A \cup B$ ;
  - b)  $A \cap B$ ;
  - c)  $A^c$ .
8. En el experimento de lanzar un dado equilibrado, considera los eventos  $A$ : “el resultado es par” y  $B$ : “el resultado es mayor que 3”.
  - a) Describe con palabras los eventos  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  y  $A^c$ .
  - b) Escribe los resultados que pertenecen a cada uno de ellos.
  - c) Explica la diferencia entre que ocurra  $A \cup B$  y que ocurra  $A \cap B$ .
9. Considera los eventos  $A$ : “una persona compra un libro” y  $B$ : “una persona compra una revista”.
  - a) Expresa mediante uniones, intersecciones y complementos el evento “compra al menos uno de los dos artículos”.
  - b) Expresa el evento “compra ambos artículos”.
  - c) Expresa el evento “no compra un libro”.
  - d) Expresa el evento “no compra ninguno de los dos artículos” y explica por qué coincide con  $(A \cup B)^c$ .

10. Supón que el espacio muestral contiene todos los posibles escenarios de la economía mundial durante el próximo año.
- Discute si conviene modelarlo como un espacio discreto o continuo.
  - Enuncia un evento de interés y describe su complemento.
  - Propón una partición del espacio muestral.
  - Describe tres eventos mutuamente excluyentes.

11. Explica qué representa el coeficiente binomial

$$\binom{n}{k}.$$

A partir de esta interpretación, justifica las identidades

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{y} \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Para la segunda identidad, considera un elemento particular y separa las selecciones según este elemento sea elegido o no.

12. Un analista financiero decide modelar el precio futuro de una acción mediante un espacio muestral continuo. Explica por qué este modelo puede ser apropiado y enuncie un evento de interés.
13. Lanza un dado 30 veces y registra la frecuencia relativa de cada uno de los seis resultados. ¿A qué valor se espera que se aproxime cada frecuencia relativa conforme aumenta el número de lanzamientos? Explica el enfoque de probabilidad que sustenta tu respuesta.

## 1.2. Cálculo y operaciones numéricas

1. Considera los subconjuntos de  $\mathbb{R}$

$$A = [7, 20), \quad B = (-5, 4), \quad C = [0, \infty).$$

- Determina  $A \cup B$ ,  $A \cap B$  y  $A \cap C$ .
  - Determina  $A^c$ ,  $B^c$  y  $C^c$ .
  - Verifica las leyes de De Morgan para  $A$  y  $B$ .
2. Sean  $A$  y  $B$  eventos tales que

$$\mathbb{P}(A) = 0.6, \quad \mathbb{P}(B) = 0.5, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0.2.$$

Calcula  $\mathbb{P}(A^c \cup B^c)$ ,  $\mathbb{P}(A^c \cap B^c)$ ,  $\mathbb{P}(A^c \cap B)$  y  $\mathbb{P}(A^c \cup B)$ .

3. Sea  $\Omega = \{a, b, c\}$ . Supón que

$$\mathbb{P}(\{a, c\}) = \frac{5}{8}, \quad \mathbb{P}(\{b, c\}) = \frac{7}{8}.$$

Usa los axiomas de probabilidad y sus consecuencias para calcular  $\mathbb{P}(\{a\})$ ,  $\mathbb{P}(\{b\})$  y  $\mathbb{P}(\{c\})$ .

4. Sean  $A$  y  $B$  eventos mutuamente excluyentes tales que  $\mathbb{P}(A) = 0.2$  y  $\mathbb{P}(B) = 0.3$ . Calcula  $\mathbb{P}(A^c)$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B)$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B)$  y  $\mathbb{P}(A \cup B^c)$ .

5. Un cliente compra un traje con probabilidad 0.22, una camisa con probabilidad 0.30 y una corbata con probabilidad 0.28. Además,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T \cap C) &= 0.11, & \mathbb{P}(T \cap R) &= 0.14, \\ \mathbb{P}(C \cap R) &= 0.10, & \mathbb{P}(T \cap C \cap R) &= 0.06.\end{aligned}$$

Calcula la probabilidad de que el cliente compre:

- ninguno de los tres artículos;
  - exactamente uno de los tres artículos.
6. Para dos eventos  $A$  y  $B$  se sabe que

$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(A \cap B^c) = \frac{1}{2}.$$

Calcula la probabilidad de que:

- ocurra al menos uno de los eventos;
  - ocurra exactamente uno de los eventos.
7. Se elige uniformemente un punto del cuadrado unitario. Sea  $A$  el triángulo delimitado por  $y = 0$ ,  $x = 1$  y  $x = y$ , y sea  $B$  el rectángulo con vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1/2)$  y  $(0, 1/2)$ . Calcula  $\mathbb{P}(A \cup B)$  y  $\mathbb{P}(A \cap B)$ .

### 1.3. Planteamiento y modelación

- Se tienen tres monedas. Sus caras están marcadas, respectivamente, con los pares  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$  y  $(5, 6)$ . Se lanza cada moneda una vez y se multiplican los tres números obtenidos. Escribe los elementos del espacio muestral.
- Se entrevista a cuatro familias y cada una indica si su ingreso anual es mayor que la mediana nacional o si es menor o igual que ella.
  - Escribe los elementos del espacio muestral.
  - Define los eventos  $A$ : “al menos dos familias tienen ingresos mayores que la mediana”,  $B$ : “exactamente dos familias tienen ingresos mayores que la mediana” y  $C$ : “exactamente una familia tiene un ingreso menor o igual que la mediana”.
  - Determina la cardinalidad de cada evento.
- Una biblioteca dispone de cinco ejemplares de un libro. Los ejemplares 1 y 2 son primeras impresiones y los ejemplares 3, 4 y 5 son segundas impresiones. Un estudiante los examina en orden aleatorio y se detiene al seleccionar la primera segunda impresión. Por ejemplo,  $(5)$  y  $(2, 1, 3)$  son resultados posibles.
  - Escribe los elementos del espacio muestral.
  - Sea  $A$  el evento en el que se examina exactamente un libro. Escribe sus elementos.
  - Sea  $B$  el evento en el que se selecciona el libro 5. Escribe sus elementos.
  - Sea  $C$  el evento en el que no se examina el libro 1. Escribe sus elementos.
- Una compañía planea lanzar tres productos. Cada producto puede tener éxito o fracasar. Define el espacio muestral.
- Se lanzan dos dados equilibrados. Calcula la probabilidad de que:

- a) el resultado del segundo dado sea mayor que el del primero;
- b) la suma de los resultados sea un número primo;
- c) el resultado del primer dado sea 6.
6. Se lanzan dos dados equilibrados. Sea  $A$  el evento en el que la suma es un número primo y sea  $B$  el evento en el que al menos uno de los dados muestra un 6. Calcula  $\mathbb{P}(A \cup B)$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B)$ ,  $\mathbb{P}(A^c)$  y  $\mathbb{P}(B^c)$ .
7. Considera una mazo de cartas inglesas con 13 cartas identificadas con los números 2, 3, ..., 10, y las letras J, Q, K y A, de cada una de las dos figuras rojas: corazones ( $\heartsuit$ ) y diamantes ( $\diamondsuit$ ); y de las dos figuras negras: tréboles ( $\clubsuit$ ) y espadas ( $\spadesuit$ ).
- Si saca una carta al azar del maso de naipes, determine las probabilidades de los siguientes eventos:
- a) La carta es una espada.
- b) La carta es de color negro.
- c) La carta es un siete.
- d) La carta es el ocho de tréboles.
- e) La carta es roja y con letra.
- f) La carta es un número primo.
8. Se estudia el medio de transporte de 300 trabajadores: 21 llegaron en bicicleta; 15, en motocicleta; 84, solos en automóvil; 45, en automóvil con otra persona; 12, en automóvil con dos o más personas; y el resto, en transporte público o caminando. Si se elige un trabajador al azar, calcule la probabilidad de que:
- a) haya llegado solo en automóvil;
- b) haya llegado en bicicleta o motocicleta;
- c) haya llegado en transporte público o caminando;
- d) haya compartido el automóvil con alguien más.
9. ★ Joey y Chandler eligen, cada uno de manera uniforme e independiente, un número de  $\{1, 2, \dots, 20\}$ . Joey gana si los números difieren en más de 3 unidades. Representa el espacio muestral y calcule la probabilidad de que Joey gane. *Sugerencia:* dibuja el espacio muestral.
10. Una moneda con caras águila y sol se lanza cuatro veces.
- a) Escribe el espacio muestral.
- b) Describe el evento en el que ambas caras aparecen el mismo número de veces.
- c) Describe el evento en el que aparece sol más veces que águila.
11. En un fondo de inversión trabajan 40 analistas, de los cuales 21 son egresados del ITAM. Se seleccionan al azar 6 analistas, sin reemplazo, para formar un equipo. Calcula la probabilidad de que la mayoría del equipo esté formada por egresados del ITAM.
12. Cuatro catadores novatos califican, a ciegas, tres vinos de Argentina, España y Francia. Cada catador asigna 1 al mejor vino, 2 al siguiente y 3 al menos preferido. Como no pueden distinguirlos, cada catador ordena los vinos al azar y después se suman las calificaciones por país.

- a)* Calcula la probabilidad de que el vino argentino obtenga una calificación total de 4.
- b)* Calcula la probabilidad de que algún vino obtenga una calificación total de 4.
- c)* Calcula la probabilidad de que algún vino obtenga una calificación total menor o igual que 5.

## 2. Probabilidad condicional e independencia

### 2.1. Comprensión teórica

1. Escribe la definición de la probabilidad condicional de  $A$  dado  $B$ . Indica la condición que debe satisfacer  $B$  para que esta probabilidad esté definida y explica por qué es necesaria.
2. Explica con tus propias palabras qué información proporciona la expresión  $\mathbb{P}(A \mid B)$ . ¿Por qué, en general, no coincide con  $\mathbb{P}(A)$ ?
3. Analiza si las expresiones  $\mathbb{P}(A \mid B)$  y  $\mathbb{P}(B \mid A)$  representan la misma probabilidad. Escribe un ejemplo que sustente tu respuesta.
4. Escribe la regla de multiplicación para dos eventos y extiéndela a tres eventos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .
5. Explica la diferencia entre eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes. ¿Pueden dos eventos de probabilidad positiva tener ambas propiedades? Justifica.
6. Sean  $A$  y  $B$  eventos. Escribe tres condiciones equivalentes que permitan determinar que  $A$  y  $B$  son independientes. Indica cuáles de ellas pueden usarse sin suponer que  $\mathbb{P}(A) > 0$  o  $\mathbb{P}(B) > 0$ .
7. Si  $A$  es independiente de  $B$  y también  $A$  es independiente de  $C$ , analiza cada afirmación e indica si necesariamente es verdadera:
  - a)  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \cap C)$ ;
  - b)  $B$  y  $C$  son mutuamente excluyentes;
  - c)  $B$  y  $C$  son independientes.
8. Explica la diferencia entre independencia por pares e independencia mutua de tres eventos. Escribe las igualdades que deben verificarse en cada caso.
9. Enuncia el teorema de probabilidad total para una partición  $B_1, \dots, B_n$  del espacio muestral. Explica qué función cumple la partición en el cálculo de  $\mathbb{P}(A)$ .
10. Enuncia el teorema de Bayes y explica cómo transforma probabilidades de la forma  $\mathbb{P}(A \mid B)$  en probabilidades de la forma  $\mathbb{P}(B \mid A)$ .
11. Una prueba médica tiene una probabilidad alta de producir un resultado positivo cuando una persona tiene cierta enfermedad. Explica por qué esta información, por sí sola, no determina la probabilidad de que una persona con resultado positivo tenga la enfermedad.

### 2.2. Cálculo y operaciones numéricas

1. Sean  $A$  y  $B$  eventos tales que

$$\mathbb{P}(A) = 0.5, \quad \mathbb{P}(B) = 0.3, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0.1.$$

Calcula:

- a)  $\mathbb{P}(A \mid B)$ ;
- b)  $\mathbb{P}(B \mid A)$ ;

- c)  $\mathbb{P}(A \mid A \cup B)$ ;
- d)  $\mathbb{P}(A \mid A \cap B)$ ;
- e)  $\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B)$ .

2. Sean  $A$  y  $B$  eventos tales que

$$\mathbb{P}(A) = 0.4, \quad \mathbb{P}(B) = 0.6, \quad \mathbb{P}(A \mid B) = 0.3.$$

Calcula  $\mathbb{P}(A \cap B)$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B)$  y  $\mathbb{P}(B \mid A)$ .

3. Sean  $A$  y  $B$  eventos independientes con  $\mathbb{P}(A) = 0.7$  y  $\mathbb{P}(B) = 0.2$ . Calcula

$$\mathbb{P}(A \cap B), \quad \mathbb{P}(A \cup B), \quad \mathbb{P}(A^c \cap B), \quad \mathbb{P}(A^c \cap B^c).$$

4. Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  eventos mutuamente independientes tales que

$$\mathbb{P}(A) = 0.4, \quad \mathbb{P}(B) = 0.5, \quad \mathbb{P}(C) = 0.8.$$

Calcula la probabilidad de que:

- a) ocurran los tres eventos;
  - b) ocurra únicamente  $A$ ;
  - c) ocurra al menos uno de los eventos;
  - d) ocurran exactamente dos de los eventos.
5. Los eventos  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$  forman una partición del espacio muestral y

|                          | $B_1$ | $B_2$ | $B_3$ |
|--------------------------|-------|-------|-------|
| $\mathbb{P}(B_i)$        | 0.50  | 0.35  | 0.15  |
| $\mathbb{P}(A \mid B_i)$ | 0.25  | 0.60  | 0.60  |

Calcula  $\mathbb{P}(A)$  y  $\mathbb{P}(B_i \mid A)$  para  $i = 1, 2, 3$ .

### 2.3. Planteamiento y modelación

1. Se encuesta a 100 estudiantes acerca de su medio de pago habitual. Los resultados son:

|                  | Tarjeta de crédito | Efectivo |
|------------------|--------------------|----------|
| Población adulta | 40                 | 22       |
| Población joven  | 29                 | 9        |

Si se elige un estudiante al azar, calcula la probabilidad de que:

- a) pertenezca a la población joven;
  - b) pertenezca a la población joven o use tarjeta de crédito;
  - c) no use tarjeta de crédito, dado que pertenece a la población joven;
  - d) no pertenezca a la población joven, dado que no usa tarjeta de crédito;
  - e) no pertenezca a la población adulta y no use tarjeta de crédito.
2. Una persona usa el teléfono  $A$  en el 60 % de sus llamadas y el teléfono  $B$  en las demás. Una llamada realizada con  $A$  se conecta con probabilidad 0.80 y una realizada con  $B$ , con probabilidad 0.90. Calcula la probabilidad de que:

- a) una llamada se conecte;
  - b) se haya usado el teléfono  $B$ , dado que la llamada se conectó.
3. La venta de maquillaje será buena con probabilidad 0.35 y mala con probabilidad 0.65. La probabilidad de que aumenten las ventas de polvo translúcido es 0.45 si la venta de maquillaje es buena y 0.25 si es mala. Calcula la probabilidad de que:
- a) la venta de maquillaje sea buena y aumenten las ventas de polvo translúcido;
  - b) aumenten las ventas de polvo translúcido;
  - c) la venta de maquillaje haya sido buena, dado que aumentaron las ventas de polvo translúcido.
4. Una analista de inversiones revisa informes trimestrales hasta encontrar uno en el que la ganancia neta sea mayor que 5 %. Escribe los eventos necesarios y calcula la probabilidad de que deba revisar más de dos informes, dado que no encontró una ganancia mayor que 5 % en el primero. Expresa tu respuesta en términos de la probabilidad  $p$  de que un informe presente una ganancia mayor que 5 % y supón independencia entre trimestres.
5. En una caja hay 15 pelotas de tenis, de las cuales 9 nunca han sido utilizadas. Se eligen tres pelotas al azar, se juega con ellas y al finalizar se regresan a la caja. Al día siguiente se seleccionan nuevamente tres pelotas al azar.
- a) Calcula la probabilidad de que ninguna de las tres pelotas elegidas el segundo día haya sido utilizada anteriormente.
  - b) Se sabe que las tres pelotas elegidas el segundo día son nuevas. Calcula la probabilidad de que, antes del juego del primer día, exactamente dos de las tres pelotas elegidas ese día ya hubieran sido usadas.
6. Una prueba de aliento da un resultado positivo en el 95 % de las personas que tienen cierta enfermedad y un resultado negativo en el 98 % de las personas que no la tienen. Se estima que el 1.5 % de la población tiene la enfermedad. Define los eventos, organiza la información y calcula la probabilidad de que una persona tenga la enfermedad, dado que su prueba resultó positiva.
7. Para evaluar a quienes aspiran a un puesto se aplica una prueba psicológica. El 8 % de las personas aptas reprueba la prueba y el 12 % de las no aptas la aprueba. Se contrata a todas las personas que aprueban. Se observa que el 85 % de las personas contratadas es apto para el puesto. Define los eventos y determina qué porcentaje de las personas aspirantes es apto.
8. Una máquina tiene tres motores. Si ninguno está descompuesto, la máquina funciona con probabilidad 1; si exactamente uno está descompuesto, funciona con probabilidad 0.7; si exactamente dos están descompuestos, funciona con probabilidad 0.49; si los tres están descompuestos, no funciona. Las probabilidades de que estén descompuestos cero, uno, dos o tres motores son, respectivamente,

$$0.562, \quad 0.403, \quad 0.032, \quad 0.003.$$

Define una partición adecuada y calcula la probabilidad de que ningún motor esté descompuesto, dado que la máquina funciona.

9. En un modelo intertemporal de ocio y consumo, la primera persona dedica el 65 % de su tiempo al ocio. Cuando la primera persona disfruta de ocio, la segunda también lo hace el 45 % del tiempo; cuando la primera consume, la segunda disfruta de ocio el 35 % del tiempo. Define los eventos y calcula la probabilidad de que:
- a) la primera persona disfrute de ocio, dado que la segunda también lo hace;
  - b) la primera persona consuma, dado que la segunda consume.
10. En un experimento se intenta enseñar a un ratón a girar a la derecha dentro de un laberinto. En el primer intento, ambas direcciones tienen la misma probabilidad. Si en un intento el ratón fue premiado por girar a la derecha, gira a la derecha en el siguiente con probabilidad  $p_1 > 1/2$ ; si fue castigado por girar a la izquierda, lo hace con probabilidad  $p_2 > p_1$ . La decisión en cada intento depende únicamente del resultado del intento inmediato anterior.
- a) Construye un diagrama de árbol para los tres primeros intentos.
  - b) Calcula la probabilidad de que el ratón gire a la derecha en el tercer intento.
  - c) Calcula la probabilidad de que gire a la derecha en el tercer intento, dado que giró a la derecha en el primero.
11. Una urna contiene 6 pelotas, 3 de ellas verdes. Primero se elige al azar un número  $N$  de  $\{1, 2, 3, 4\}$ . Después se extrae, sin reemplazo, una muestra de  $N$  pelotas. Define una partición basada en el valor de  $N$  y calcula la probabilidad de que la muestra contenga:
- a) exactamente una pelota verde;
  - b) al menos una pelota verde.
12. Una caja contiene 6 focos en buen estado y 4 focos fundidos. Se eligen 4 focos al azar, sin reemplazo, y se transfieren a una segunda caja vacía. Después se eligen 2 focos de la segunda caja, también sin reemplazo. Se sabe que entre los cuatro focos transferidos hay al menos dos en buen estado. Define los eventos y calcula la probabilidad de que los dos focos elegidos de la segunda caja estén en buen estado.
13. Se tienen tres cajas. La primera contiene dos monedas de oro; la segunda, una moneda de oro y una de plata; y la tercera, dos monedas de plata. Se elige una caja al azar y después una moneda de esa caja. La moneda elegida es de oro.
- a) Explica por qué el razonamiento “quedan dos cajas posibles, por lo tanto la probabilidad es  $1/2$ ” no es correcto.
  - b) Define los eventos y calcula la probabilidad de que la moneda provenga de la caja que contiene dos monedas de oro.
14. Harry elige al azar una de dos monedas: una equilibrada y otra con águila en ambas caras. Lanza la moneda elegida y obtiene águila.
- a) Calcula la probabilidad de que haya elegido la moneda equilibrada.
  - b) Lanza la misma moneda otra vez y vuelve a obtener águila. Actualiza la probabilidad de que la moneda sea equilibrada.
15. Buzz y Woody lanzan alternadamente un par de dados. Buzz gana si obtiene una suma de 6 antes de que Woody obtenga una suma de 7. Buzz comienza. Define los eventos necesarios, descompón el juego en rondas y calcula la probabilidad de que Buzz gane. *Sugerencia:* usa la suma de una serie geométrica.

### 3. Autoevaluación. Fundamentos de probabilidad

#### 3.3. Planteamiento y modelación

1. El autobús del ITAM llega a tiempo, *o bien*, llega tarde. La probabilidad de que llegue tarde es 0.6. Si el autobús del ITAM llega tarde, la probabilidad condicional de que haya tráfico en la ciudad es de 0.7. Si el autobús del ITAM llega a tiempo, la probabilidad condicional de que haya tráfico es de 0.1. Si un día observas tráfico, ¿cuál es la probabilidad condicional de que el autobús del ITAM llegue tarde?
2. La cafetería del ITAM es visitada por Farah durante la hora de comida en un día de lunes a viernes con la misma probabilidad, a saber  $p$ . Su visita es independiente entre los días. Un integrante de la Facultad del ITAM asiste de lunes a viernes a la cafetería del ITAM a la hora de la comida.
  - a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona se encuentre a Farah dos días?
  - b) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona vea a Farah por segunda vez en la semana el viernes?
3. Según las estadísticas de ventas del mes pasado, se sabe que el 10 % de las personas que entran a la tienda ITAM no compran nada; y aquellas que sí compran se llevan *únicamente* un peluche colmillo en alguno de los colores disponibles. El colmillo gris es el más solicitado; de hecho, la probabilidad de que un visitante de la tienda ITAM se lleve un colmillo gris es el doble que la de un colmillo café.

Como parte de las nuevas estrategias de venta de la tienda ITAM, se ofrecen “combos colmillo”. Al adquirirlos la persona se lleva un peluche colmillo en uno de los colores: gris o café. Además de un artículo que puede ser una taza ITAM *o bien* una bolsa ITAM. Cuando las personas piden el colmillo gris, el 80 % adquieren el combo con la taza; por el contrario, cuando piden el colmillo café, solo el 40 % adquiere la bolsa.

Basándose en todo lo anterior, calcula la probabilidad de que una persona adquiera una taza.

4. Una empresa tiene 15 vacantes disponibles, distribuidas de la siguiente manera: 5 en el área de administración, 6 en el área de finanzas y 4 en el área de análisis de datos. Si la empresa contrata a 10 egresados del ITAM para ocupar 10 de las 15 vacantes disponibles:
  - a) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 de los egresados del ITAM ocupen vacantes en el área de finanzas? Justifica la respuesta.
  - b) Ahora supongamos que de los 10 egresados del ITAM recién contratados: 4 ocupan el área de finanzas y 3 el área de análisis de datos. Si la empresa selecciona para una capacitación a 2 de los 10 egresados del ITAM. ¿Cuál es la probabilidad de que *al menos uno* de ellos dos pertenezca al área de administración?
5. Para mantener sus estándares de calidad la cafetería del ITAM seleccionó a dos personas para que evalúen el servicio. Supongamos que cada persona independientemente asigna una calificación en el conjunto  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ , uniformemente al azar.
  - a) Escribe el espacio muestral del experimento y determina su cardinalidad.
  - b) Sea  $A$  el evento de que las dos personas asignan la misma calificación y  $B$  donde la suma de las calificaciones asignadas es 6. ¿Son  $A$  y  $B$  son independientes? Justifica la respuesta.

c) Calcula  $\mathbb{P}(A^c \mid B^c)$ .

## 4. Funciones de masa, densidad y distribución

### 4.1. Comprensión teórica

1. Explica qué información proporciona la función de masa de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Escribe las propiedades que debe satisfacer una función para ser una función de masa de probabilidad.
2. Explica qué información proporciona la función de densidad de una variable aleatoria continua. Escribe las propiedades que debe satisfacer una función para ser una función de densidad.
3. Analiza por qué, para una variable aleatoria continua  $X$ , el valor  $f_X(x)$  no representa la probabilidad  $\mathbb{P}(X = x)$ .
4. Escribe la definición de la función de distribución  $F_X$  de una variable aleatoria  $X$  y explica por qué esta función puede utilizarse tanto para variables aleatorias discretas como continuas.
5. Escribe las propiedades que debe satisfacer una función de distribución. Explica qué representa un salto de  $F_X$  en un punto  $x$ .
6. Explica cómo se obtiene la función de distribución a partir de:
  - a) una función de masa;
  - b) una función de densidad.
7. Explica cómo se recupera la función de masa de una variable aleatoria discreta a partir de su función de distribución y cómo se recupera una función de densidad cuando la función de distribución es derivable.
8. Analiza si una función de densidad puede tomar valores mayores que uno. Justifica tu respuesta y señala qué cantidad debe encontrarse siempre entre cero y uno.
9. Sean  $f_1$  y  $f_2$  funciones de densidad, y sean  $\theta_1, \theta_2 > 0$  tales que  $\theta_1 + \theta_2 = 1$ . Verifica que

$$f(x) = \theta_1 f_1(x) + \theta_2 f_2(x)$$

es una función de densidad.

10. Considera la función

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Analiza cuáles de las propiedades de una función de distribución satisface  $F$  e identifica la propiedad que no se cumple.

## 4.2. Cálculo y operaciones numéricas

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = k|x|(1+x)(1-x)\mathbb{1}_{[-1,1]}(x).$$

- a) Calcula  $k$  para que  $f_X$  sea una función de densidad.
- b) Obtén la función de distribución  $F_X$ .
- c) Calcula  $\mathbb{P}(-1/2 < X < 1/2)$ .

2. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/8, & 0 \leq x < 2, \\ x^2/16, & 2 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

- a) Calcula  $\mathbb{P}(1.5 < X \leq 3)$  y  $\mathbb{P}(X \geq 3.75)$ .
- b) Obtén la función de densidad de  $X$ .

3. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de masa

$$p_X(x) := \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{2^x} \mathbb{1}_{\{1,2,3,\dots\}}(x).$$

Obtén y grafica la función de distribución  $F_X$ .

4. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x).$$

Obtén la función de distribución  $F_X$ .

5. Sea  $Y$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f_Y(y) = ky^3 e^{-y/2} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$

Calcula el valor de  $k$  y grafica  $f_Y$ .

6. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{20000}{(100+x)^3} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

- a) Comprueba que  $f_X$  es una función de densidad.
- b) Calcula  $\mathbb{P}(X > t)$  para  $t > 0$ .

7. Considera la función

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x/2, & 0 < x \leq 1, \\ \sqrt{x}/2, & 1 < x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Verifica que  $F_X$  es una función de distribución y gráficala.

### 4.3. Planteamiento y modelación

1. Un dado equilibrado se lanza sucesivamente. El experimento se detiene inmediatamente cuando, por primera vez, aparece una cara que ya había aparecido en alguno de los lanzamientos anteriores; después de ese momento no se vuelve a lanzar el dado. Sea  $X$  el número total de lanzamientos realizados hasta que se detiene el experimento. Obtén la función de masa de probabilidad de  $X$ .
2. En un grupo de cuatro componentes, dos son defectuosos. Una inspectora prueba los componentes, uno por uno y en orden aleatorio. Sea  $Y$  el número de la prueba en la que encuentra el segundo componente defectuoso. Obtén la función de masa de probabilidad de  $Y$ .
3. Una caja contiene  $r$  bolas numeradas  $1, 2, \dots, r$ . Se selecciona sin reemplazo una muestra aleatoria de tamaño  $n$ . Sea  $Y$  el mayor número seleccionado y sea  $Z$  el menor. Calcula:
  - a)  $\mathbb{P}(Y \leq y)$ ;
  - b)  $\mathbb{P}(Z \geq z)$ .

4. Se lanzan sucesivamente tres bolas hacia tres tazones vacíos. Distinguimos las bolas por su orden de lanzamiento: primera, segunda y tercera. De manera independiente, cada bola entra con la misma probabilidad en cualquiera de los tres tazones. Sea  $Y$  el número de tazones que quedan vacíos al terminar los tres lanzamientos. Obtén la función de masa de probabilidad de  $Y$ .

*Sugerencia.* Un resultado elemental se representa mediante una terna  $(i, j, k)$ , donde  $i, j$  y  $k$  indican, respectivamente, los tazones en los que entran la primera, la segunda y la tercera bola.

5. Se lanzan sucesivamente tres bolas hacia tres tazones vacíos. De manera independiente, cada bola entra con la misma probabilidad en cualquiera de los tres tazones. Sea  $Y$  el número de tazones que quedan vacíos. Obtén la función de masa de probabilidad de  $Y$ .
6. Una colonia evoluciona en generaciones discretas. Cada célula muere con probabilidad 0.1 o se divide en dos con probabilidad 0.9, de manera independiente de las demás. La colonia comienza con una célula en la primera generación. Sea  $X$  el número de células de la tercera generación. Obtén la función de masa de probabilidad de  $X$ .
7. Una moneda equilibrada se lanza hasta que alguno de sus dos resultados aparece por tercera ocasión, no necesariamente de forma consecutiva. Sea  $X$  el número de lanzamientos realizados. Obtén la función de masa de probabilidad de  $X$ .
8. Una caja contiene seis bolas rojas y cuatro negras. Se selecciona una muestra de tamaño  $n$  y se define  $X$  como el número de bolas rojas seleccionadas. Obtén la función de masa de  $X$  si la muestra se toma:
  - a) sin reemplazo, con  $n \leq 6$ ;
  - b) con reemplazo, con  $n \geq 1$ .
9. Dos bolas se seleccionan de una caja que contiene doce bolas numeradas  $1, 2, \dots, 12$ . Sea  $X$  el mayor de los dos números seleccionados. Obtén la función de masa de  $X$  si la selección se realiza:

- a) con reemplazo;
- b) sin reemplazo.

## 5. Variables aleatorias discretas y continuas importantes

### 5.1. Comprensión teórica

1. Explica la diferencia entre una variable aleatoria discreta y una continua. Incluye un ejemplo de cada tipo.
2. Para cada una de las siguientes distribuciones, escribe el experimento que modela, sus parámetros y los valores que puede tomar la variable aleatoria: binomial, geométrica, binomial negativa, hipergeométrica y Poisson.
3. Analiza la diferencia entre una variable aleatoria binomial y una hipergeométrica. Explica el papel del reemplazo en cada modelo.
4. Explica la diferencia entre una variable aleatoria binomial y una geométrica. Compara qué permanece fijo y qué se cuenta en cada caso.
5. Analiza en qué situaciones es razonable utilizar una distribución de Poisson. Explica cómo cambia su parámetro al modificar el intervalo de tiempo, área o volumen observado.
6. Escribe una situación que pueda modelarse mediante una distribución uniforme discreta y otra mediante una uniforme continua. Explica qué significa “uniforme” en cada caso.
7. Explica la propiedad de falta de memoria de la distribución exponencial y escríbela mediante probabilidades condicionales.
8. Analiza la relación entre un conteo Poisson y el tiempo de espera exponencial hasta la primera ocurrencia.
9. Explica cómo se utiliza la distribución normal estándar para calcular probabilidades de una variable aleatoria normal.

### 5.2. Cálculo y operaciones numéricas

En todos los ejercicios, escribe primero la expresión teórica que permite obtener la probabilidad solicitada e identifica con claridad la distribución y sus parámetros. Después, utiliza un paquete de R únicamente para obtener el valor numérico final. La instrucción de usar R no sustituye el planteamiento teórico: una respuesta que presente solo el resultado numérico o el comando de R se considerará incompleta.

1. Sea  $X \sim \text{Bin}(10, 0.6)$ . Calcula  $\mathbb{P}(X = 6)$ ,  $\mathbb{P}(X \geq 6)$  y  $\mathbb{P}(3 < X \leq 8)$ .
2. Sea  $X \sim \text{Bin}(n, p)$ . Calcula  $\mathbb{P}(X > 1 \mid X \geq 1)$ .
3. Sea  $X \sim \text{Geom}(0.1)$ , donde  $X$  cuenta los ensayos hasta el primer éxito. Calcula  $\mathbb{P}(X = 5)$ ,  $\mathbb{P}(X \geq 5)$  y  $\mathbb{P}(X > 8 \mid X > 3)$ .
4. Sea  $X \sim \text{NegBin}(4, 0.3)$ , donde  $X$  cuenta los ensayos necesarios para obtener el cuarto éxito. Calcula  $\mathbb{P}(X = 7)$  y  $\mathbb{P}(X > 7)$ .
5. Sea  $X \sim \text{Pois}(5)$ . Calcula  $\mathbb{P}(X \leq 4)$ ,  $\mathbb{P}(X \geq 12)$  y  $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 7)$ .
6. Sea  $X \sim \text{Hipergeom}(N = 30, K = 10, n = 6)$ . Calcula  $\mathbb{P}(X = 0)$ ,  $\mathbb{P}(X \geq 1)$  y  $\mathbb{P}(X \leq 2)$ .

7. Sea  $X \sim \text{Unif}\{1, 2, \dots, 10\}$ . Calcula  $\mathbb{P}(X^2 \geq 9)$  y  $\mathbb{P}(\lfloor X/2 \rfloor = 3)$ .
8. Sea  $X \sim \text{Unif}(1, 5)$ . Calcula  $\mathbb{P}(X > 2)$ ,  $\mathbb{P}(X > 2 \mid X > 1.5)$  y  $\mathbb{P}(2 \leq X \leq 4)$ .
9. Sea  $X \sim \text{Exp}(1/3)$ , con parámetro de tasa  $\lambda = 1/3$ . Calcula  $\mathbb{P}(X \leq 1)$ ,  $\mathbb{P}(1 < X \leq 3)$  y  $\mathbb{P}(X > 4 \mid X > 2)$ .
10. Sea  $X \sim \text{Gamma}(3, 2)$ , donde el primer parámetro es el de forma y el segundo es el de tasa. Calcula  $\mathbb{P}(X \leq 1)$ ,  $\mathbb{P}(1 < X \leq 2)$ ,  $\mathbb{P}(X > 2)$ .
11. Sea  $Z \sim N(0, 1)$ . Calcula  $\mathbb{P}(-1.5 < Z < 1.5)$ ,  $\mathbb{P}(Z > 1.96)$  y el valor  $c$  tal que  $\mathbb{P}(Z \leq c) = 0.8531$ .
12. Sea  $X \sim N(950, 10^2)$ . Calcula  $\mathbb{P}(947 < X < 958)$  y el valor  $c$  tal que  $\mathbb{P}(X < c) = 0.8531$ .

### 5.3. Planteamiento y modelación

1. Una empresa dispone de tres productos de inversión de cierto tipo. Cada cliente desea comprar uno, independientemente de los demás, con probabilidad 0.4. Durante una hora llegan cinco clientes. Define una variable aleatoria, identifica su distribución y calcula la probabilidad de que todos los clientes que desean comprar el producto puedan hacerlo.
2. Un director afirma que el 80 % de quienes asisten a una presentación consideran que los servicios de su empresa son de muy alta calidad. Se encuesta a 25 asistentes. Define una variable aleatoria, identifica su distribución y calcula la probabilidad de que exactamente 22 compartan esa opinión.
3. Un inversionista tiene 30 opciones independientes, cada una con probabilidad 0.25 de resultar exitosa. Define una variable aleatoria, identifica su distribución y calcula la probabilidad de que al menos 18 inversiones sean exitosas.
4. En una población, el 90 % de los dentistas recomienda cierta pasta dental. Se entrevista a dentistas, de manera independiente, hasta encontrar al primero que no la recomienda. Define una variable aleatoria, identifica su distribución y calcula la probabilidad de necesitar exactamente cinco entrevistas y la de necesitar al menos cinco.
5. En promedio hay cuatro personas en cada región de  $2 \text{ m}^2$  de un bar. Define una variable aleatoria y calcula la probabilidad de que no haya personas en una región de  $2 \text{ m}^2$  y la de que haya al menos tres en una región de  $4 \text{ m}^2$ .
6. Una exhibición recibe, en promedio, cinco visitantes por hora. Define las variables necesarias y utiliza un modelo Poisson para calcular la probabilidad de que en media hora lleguen cuatro visitantes o menos y la de que durante una hora lleguen al menos doce.
7. Una firma tiene 20 clientes: ocho invierten en bonos y doce en acciones. Se seleccionan al azar, sin reemplazo, cinco clientes. Define una variable aleatoria, identifica su distribución y obtén su función de distribución.
8. Un banco tiene 30 préstamos empresariales, diez de alto riesgo. Una auditora selecciona al azar seis préstamos, sin reemplazo. Define una variable aleatoria, identifica su distribución y calcula la probabilidad de que al menos uno sea de alto riesgo.

9. Un vendedor se ubica al azar a lo largo del segmento de playa entre los hoteles  $A$  y  $B$ . Define una variable aleatoria uniforme continua y calcula la probabilidad de que esté más cerca de  $A$  que de  $B$  y la de que su distancia a  $A$  sea al menos tres veces su distancia a  $B$ .
10. El número de inversionistas que llegan a una oficina entre los tiempos 0 y  $t$  sigue una distribución Poisson con parámetro  $\lambda t$ . Sea  $T$  el tiempo hasta la primera llegada. Identifica la distribución de  $T$  y obtén  $\mathbb{P}(T > t)$ .
11. La longitud, en milímetros, de los tornillos de una fábrica se distribuye normalmente con media 950 y desviación estándar 10. Define la variable aleatoria y calcula la probabilidad de que un tornillo mida entre 947 y 958 milímetros.
12. ★ Se lanza un dado equilibrado 1000 veces. Define una variable aleatoria y utiliza una aproximación normal, con corrección por continuidad, para calcular la probabilidad de que el número seis aparezca entre 150 y 200 veces, inclusive.
13. ★ El 75 % de los conductores de cierto estado utiliza regularmente el cinturón de seguridad. Se seleccionan 500 conductores. Define una variable aleatoria y utiliza una aproximación normal, con corrección por continuidad, para calcular la probabilidad de que entre 360 y 400, inclusive, utilicen el cinturón.
14. En el siglo XVII, el caballero de Méré pidió a Blaise Pascal comparar las probabilidades de dos eventos. Calcula las probabilidades de los siguientes eventos, que de Méré consideraba igualmente probables antes de que la experiencia mostrara lo contrario.
  - a) Se lanza un dado equilibrado cuatro veces. Calcula la probabilidad de obtener *al menos un 6*.
  - b) Se lanzan *dos* dados equilibrados 24 veces. Calcula la probabilidad de obtener *al menos un doble seis*.

## 6. Características numéricas de una variable aleatoria

### 6.1. Comprensión teórica

1. Explica qué información proporciona la esperanza de una variable aleatoria y por qué no necesariamente coincide con uno de sus valores posibles.
2. Escribe la definición de esperanza para una variable aleatoria discreta y para una continua. Indica las condiciones bajo las cuales existe.
3. Explica la Ley del Estadístico Inconsciente (LOTUS). Escribe la fórmula para calcular  $\mathbb{E}[g(X)]$  cuando  $X$  es discreta y cuando es continua, sin obtener primero la distribución de  $g(X)$ .
4. Escribe las propiedades de linealidad de la esperanza. Analiza por qué para calcular  $\mathbb{E}(aX + b)$  no se requiere conocer la distribución de  $aX + b$ .
5. Explica qué mide la varianza y escribe dos fórmulas equivalentes para calcularla. Justifica por qué  $\text{Var}(X) \geq 0$ .
6. Verifica que, para constantes  $a$  y  $b$ ,

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$

Explica por qué sumar una constante no modifica la varianza.

7. Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada respuesta.
  - a) Si  $\mathbb{E}(X) = 0$ , entonces  $X = 0$  con probabilidad uno.
  - b) Si  $\text{Var}(X) = 0$ , entonces  $X$  es constante con probabilidad uno.
  - c) Si  $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ , entonces  $X$  y  $Y$  tienen la misma distribución.
  - d) Si  $\text{Var}(X) = \text{Var}(Y)$ , entonces  $X$  y  $Y$  tienen la misma distribución.
8. Explica qué es un cuantil de orden  $p$ . Analiza cuándo puede no ser único y distingue entre mediana, cuartiles y percentiles.
9. Sea  $X$  una variable aleatoria cuya distribución es simétrica respecto de  $a$ . Justifica que, cuando la esperanza existe,  $\mathbb{E}(X) = a$ . Analiza si la mediana también debe ser igual a  $a$ .
10. Explica por qué la media y la mediana pueden ser muy distintas en una distribución asimétrica. Indica cuál de las dos es más sensible a valores extremos.
11. Comprueba que si  $X$  y  $Y$  tienen la misma distribución, entonces  $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$ , siempre que las esperanzas existan.
12. Analiza la diferencia entre  $g(\mathbb{E}[X])$  y  $\mathbb{E}[g(X)]$ . Escribe un ejemplo en el que estas cantidades no coincidan.

### 6.2. Cálculo y operaciones numéricas

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de masa

$$f_X(x) = \frac{x}{10} \mathbb{1}_{\{1,2,3,4\}}(x).$$

Calcula  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{E}(X^2)$ ,  $\text{Var}(X)$  y la desviación estándar de  $X$ .

2. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = 2x \mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

Calcula  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\mathbb{E}(X^2)$ ,  $\text{Var}(X)$  y la mediana de  $X$ .

3. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x^2/4, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Calcula la media, la varianza y los cuartiles de  $X$ .

4. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x).$$

Utiliza la simetría para obtener  $\mathbb{E}(X)$  y la mediana. Calcula después  $\mathbb{E}(X^2)$  y  $\text{Var}(X)$ .

5. Sea  $X \sim \text{Bin}(10, 0.6)$ . Calcula  $\mathbb{E}(3X - 2)$  y  $\text{Var}(3X - 2)$ .
6. Sea  $X \sim \text{Geom}(0.1)$ , donde  $X$  cuenta los ensayos hasta el primer éxito. Calcula la media, la varianza y el menor entero  $m$  que satisface  $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 0.75$ .
7. Sea  $X \sim \text{Pois}(5)$ . Calcula  $\mathbb{E}(X)$ ,  $\text{Var}(X)$  y, usando LOTUS,  $\mathbb{E}[X(X - 1)]$ .
8. Sea  $X \sim \text{Unif}\{1, 2, \dots, 10\}$ . Calcula  $\mathbb{E}[(X - 5)^2]$ .
9. Sea  $X \sim \text{Unif}(1, 5)$ . Calcula la media, la varianza, la mediana y los cuartiles de  $X$ .
10. Sea  $X \sim \text{Exp}(1/3)$ , con parámetro de tasa  $\lambda = 1/3$ . Calcula la mediana y el percentil 90.
11. Sea  $X \sim N(950, 10^2)$ . Calcula los cuantiles de órdenes 0.025 y 0.975. Utiliza R.
12. Sea  $X$  una variable aleatoria con  $\mathbb{E}(X) = 3$  y  $\text{Var}(X) = 4$ . Calcula  $\mathbb{E}(2X^2 - 3X + 1)$  y  $\text{Var}(5 - 2X)$ .
13. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{20000}{(100 + x)^3} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Determina si existen  $\mathbb{E}(X)$  y  $\text{Var}(X)$ . Plantea las integrales correspondientes y utiliza software para evaluarlas o determinar si convergen.

14. Sea  $X$  variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = ce^{-\lambda x} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x).$$

Se sabe que la mediana de  $X$  es 4. ¿cuál es la probabilidad de que  $X$  sea mayor a 5?

15. Sea  $X$  una v.a. con función de densidad de probabilidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2a} \mathbb{I}_{(-a,a)}(x), \quad a > 0.$$

Utilizando la desigualdad de Chebyshev, calcule una cota inferior para  $\mathbb{P}(|X| \leq a)$ .

16. Sea  $X$  una variable aleatoria continua no negativa con  $\mathbb{E}[X] = 25$ . Utiliza la desigualdad de Jensen para establecer una cota (inferior o superior, según corresponda) en cada uno de los siguientes casos.
- a)  $\mathbb{E}[X^3]$ .
  - b)  $\mathbb{E}[\sqrt{X}]$ .
  - c)  $\mathbb{E}[\ln(X)]$ .
  - d)  $\mathbb{E}[e^{-X}]$ .

### 6.3. Planteamiento y modelación

1. Una empresa dispone de tres productos de inversión de cierto tipo. Durante una hora llegan cinco clientes y cada uno desea comprar uno, independientemente de los demás, con probabilidad 0.4. Define la variable aleatoria que cuenta la demanda y calcula su media y su varianza. Interpreta ambos resultados en el contexto del problema.
2. Una exhibición recibe, en promedio, cinco visitantes por hora. Define una variable aleatoria para el número de visitantes que llegan en media hora. Calcula e interpreta su media y su varianza.
3. Una firma tiene 20 clientes: ocho invierten en bonos y doce en acciones. Se seleccionan al azar, sin reemplazo, cinco clientes. Define la variable aleatoria que cuenta cuántos invierten en bonos y calcula su media y su varianza.
4. El tiempo, en minutos, que una persona espera para recibir atención tiene distribución exponencial con media de seis minutos. Calcula la mediana y el percentil 90. Interpreta ambos valores.
5. La longitud, en milímetros, de los tornillos de una fábrica se distribuye normalmente con media 950 y desviación estándar 10. Determina el intervalo simétrico respecto de la media que contiene el 95 % central de las longitudes.
6. Una inversión produce una ganancia de 200 pesos con probabilidad 0.6 y una pérdida de 150 pesos con probabilidad 0.4. Define la ganancia aleatoria, calcula su esperanza y su varianza, e interpreta si el juego es favorable en promedio.
7. Una aseguradora paga 10 000 pesos si ocurre un siniestro, cuya probabilidad es 0.02, y no paga nada en otro caso. Define el pago aleatorio y utiliza su esperanza para determinar la prima mínima que cubre el pago promedio, sin considerar otros gastos.
8. El precio de un activo al final del día es una variable aleatoria  $X$  con  $\mathbb{E}(X) = 120$  y  $\text{Var}(X) = 25$ . Una cartera contiene tres unidades del activo y 40 pesos en efectivo. Define el valor final de la cartera y calcula su media y su desviación estándar.
9. Una moneda equilibrada se lanza hasta que alguno de sus dos resultados aparece por tercera ocasión, no necesariamente de forma consecutiva. Sea  $T$  el número de lanzamientos realizados. Obtén la media y la varianza de  $T$ .
10. Una colonia comienza con una célula en la primera generación. En cada generación, cada célula muere con probabilidad 0.1 o se divide en dos con probabilidad 0.9, independientemente de las demás. Sea  $X$  el número de células de la tercera generación. Utiliza su función de masa para calcular e interpretar  $\mathbb{E}(X)$  y  $\text{Var}(X)$ .

11. ★ **El problema del ladrón de Bagdad.** El ladrón de Bagdad ha sido colocado en una prisión con tres puertas. Una conduce a un túnel que requiere un día de travesía y lo regresa a la misma prisión. Otra conduce a un túnel más largo que lo regresa a la prisión después de tres días. La tercera conduce a la libertad inmediatamente. Supón que, cada vez que regresa a la prisión, el ladrón elige una puerta uniformemente al azar. Calcula el número promedio de días que tarda en quedar en libertad y su desviación estándar. Considera los casos en que el ladrón recuerda la elección y en los que no
12. En un casino hay una caja con cinco canicas rojas y cinco azules. Se seleccionan dos canicas al azar, sin reemplazo. Si ambas son del mismo color, ganas  $p$  pesos; si son de colores distintos, pierdes un peso. Determina el valor de  $p$  que hace que el juego sea justo, es decir, que su valor esperado sea cero.
13. El tiempo de vida, en años, de una consola de videojuegos se modela mediante una variable aleatoria  $X$  con función de densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-x/2}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x).$$

El precio de la consola es de 12 000 pesos. Si la consola falla durante el primer año, la compañía reembolsa el 100 % de su precio; si falla durante el segundo año, reembolsa el 50 %; si falla después del segundo año, no realiza ningún reembolso. Define la variable aleatoria que representa el reembolso y calcula el valor esperado del pago que realiza la compañía por cada consola vendida.

14. Pierre-Simon Laplace declaró en *Théorie analytique des probabilités* (1812):

*Las preguntas más importantes de la vida, de hecho, no son en su mayoría más que problemas de probabilidad.*

Se elige uniformemente al azar una palabra de esta afirmación. Sea  $N$  el número de letras de la palabra elegida.

- Calcula la moda, la mediana, la media y la desviación estándar de  $N$ .
  - Calcula la probabilidad de que  $N$  diste de su media en menos de dos unidades.
15. El rendimiento de un portafolio se modela mediante una variable aleatoria  $X$  con media 9.64 % y desviación estándar 13.5 %. Una inversionista desea ajustar el portafolio de modo que el nuevo rendimiento tenga media 12 % y desviación estándar 9 %. Determina la transformación de la forma  $a + bX$  que produce estas características.
16. ★ El número anual de tormentas de nieve que ocasionan el cierre de un negocio se modela mediante una variable aleatoria  $X$  cuya función de masa satisface

$$\frac{\mathbb{P}(X = x)}{\mathbb{P}(X = x - 1)} = \frac{2.5}{x}, \quad x = 1, 2, 3, \dots$$

- Calcula la probabilidad de que en un año no ocurra ninguna tormenta que provoque el cierre del negocio. *Sugerencia:* recuerda que  $\sum_{x=0}^{\infty} \alpha^x / x! = e^\alpha$ .
- Obtén la función de masa de  $X$  para  $x = 0, 1, 2, \dots$
- Calcula  $\mathbb{E}(X)$ .

17. Se tienen dos urnas. La urna I contiene diez pelotas: cinco marcadas con 0, tres con 1 y dos con 2. La urna II contiene diez pelotas: tres marcadas con 0, cuatro con 1 y tres con 2. Se elige al azar una pelota de cada urna, de manera independiente. Sea  $X$  la suma de los números marcados en las pelotas seleccionadas. Determina la media, la moda y la mediana de  $X$ .
18. ★ **La paradoja de San Petersburgo.** Una persona lanza una moneda equilibrada hasta obtener por primera vez la cara elegida de antemano. Si el primer éxito ocurre en el lanzamiento  $n$ , recibe un premio de  $2^n$  pesos. Calcula la media del premio y analiza el resultado.
19. Una exhibición de arte en Nueva York recibe en promedio a 5 personas por hora.
- (a) Si el ingreso diario de la galería, generado por las visitas durante 7 horas de operación, se modela como
- $$W = -100 + N + 2N^2,$$
- donde  $N$  es el número de visitantes recibidos por día. Encuentre el ingreso esperado por día en la galería.
- (b) Si se consideran 5 días (independientes) en una semana, determine la probabilidad de que en al menos 4 días hayan más de 7 personas entre las 11:00 y las 12:00 hrs.
20. Sea  $X$  v.a. que denota el contenido de un frasco de un perfume medido en mililitros. De acuerdo a la experiencia se puede considerar que  $X \sim N(100, \sigma_x^2)$ . El encargado de calidad de la casa de perfumes requiere que no más del 5 % de los frascos llenados contengan menos de 98 ml o bien más de 102 ml. Determine el valor máximo que  $\sigma_x$  puede tomar para satisfacer los requerimientos del encargado.
21. El tiempo que tarda en trasladarse de su casa al ITAM se puede modelar como una variable aleatoria normal con media igual a 40 minutos y desviación estándar igual a 7 minutos. Su primera clase es a las 11:30 A.M, y va a la escuela 20 días al mes.
- (a) Si sale todos los días de su casa a las 10:35 A.M, ¿qué proporción de días llega tarde?
- (b) Calcule la probabilidad de que llegue más de dos días tarde en un mes. Explique sus supuestos.
- (c) Si quiere estar 90 % seguro de que va a llegar temprano a la escuela, ¿a qué hora es lo más tarde que debe salir de su casa?
22. La precipitación pluvial anual medida en pulgadas de una región específica sigue aproximadamente una distribución  $N(40, 16)$ . ¿Cuál es la probabilidad de que, comenzando este año, tengan que pasar más de 10 años para que ocurra una precipitación pluvial anual de más de 50 pulgadas?
23. Las ganancias de un inversionista se modelan con una variable aleatoria exponencial de media \$2000. En un fondo con 10 inversionistas, ¿cuál es la probabilidad de que 9 o 10 tengan ganancias mayores a \$2000? (*Sugerencia:* supón independencia entre las ganancias de los inversionistas).
24. La altura máxima,  $X$ , que alcanzan cierto tipo de flores se asume con distribución Normal de media  $\mu$  y varianza  $\sigma^2$ . Por experiencia, se sabe que el 33 % de este tipo de flores alcanza una altura máxima menor a los 50 centímetros; mientras que, el 69.5 % tienen una altura máxima menor a los 60 centímetros. Determina:

- (a) la media y varianza de la altura máxima alcanzada por estas flores;
- (b) el porcentaje de flores cuya altura máxima es mayor a los 70 centímetros.
- (c) Supón que a las flores se les aplica un nuevo tratamiento, de tal manera que la altura máxima de crecimiento ahora está modelada por medio de la variable aleatoria  $Y = 1.1X + 5$ . Encuentra la distribución de  $Y$  y determina la proporción de flores cuya altura máxima se encuentra entre los 70 y 80 centímetros.

## 7. Función generadora de momentos y transformaciones de variables aleatorias

### 7.1. Comprensión teórica

1. Sea  $X$  una variable aleatoria con función generadora de momentos  $M_X(t)$  y define  $\psi_X(t) = \log M_X(t)$ . Verifica que

$$\psi'_X(0) = \mathbb{E}(X) \quad \text{y} \quad \psi''_X(0) = \text{Var}(X).$$

2. Sea  $Y$  una variable aleatoria con f.g.m.  $M_Y(t)$  y define  $W = aY + b$ , donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Verifica que

$$M_W(t) = e^{bt} M_Y(at).$$

3. Analiza si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica cada respuesta.
  - a) Si dos variables aleatorias tienen la misma f.g.m. en un intervalo abierto que contiene al cero, entonces tienen la misma distribución.
  - b) Si dos variables aleatorias tienen los tres primeros momentos iguales, entonces tienen la misma distribución.
  - c) La f.g.m. de una variable aleatoria siempre existe para todo  $t \in \mathbb{R}$ .
  - d) Si  $M_X(t)$  existe en un intervalo abierto que contiene al cero, entonces  $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$ .
4. Explica la diferencia entre obtener la distribución de  $Y = g(X)$  mediante el método de la función de distribución y mediante el teorema de cambio de variable. Indica qué debe revisarse cuando  $g$  no es uno a uno.
5. Sea  $X \sim N(0, 1)$  y  $Y = X^2$ . Explica por qué no es correcto aplicar directamente la fórmula de cambio de variable usando una sola inversa de  $g(x) = x^2$ . Identifica las ramas inversas que deben considerarse.
6. Considera la afirmación: “si  $g$  es creciente, entonces  $F_{g(X)}(y) = F_X(g^{-1}(y))$ ”. Indica las condiciones bajo las cuales es válida y escribe la expresión correspondiente cuando  $g$  es decreciente.

### 7.2. Cálculo y operaciones numéricas

1. La variable aleatoria  $X$  tiene función generadora de momentos

$$M_X(t) = ae^t + be^{2t}.$$

Se sabe que  $\text{Var}(X) = 2/9$  y  $a < 1/2$ . Determina  $\mathbb{E}(X)$ .

*Sugerencia.* Usa primero  $M_X(0) = 1$  para relacionar  $a$  y  $b$ .

2. Sea  $Y$  una variable aleatoria con f.g.m.

$$M_Y(t) = (1 - 0.25t)^{-3}, \quad t < 4.$$

- a) Obtén la media y la varianza de  $Y$ .
- b) Determina si su distribución es simétrica.
- c) Para  $W = 6Y - 2$ , calcula  $M_W(t)$ .

d) Obtén la media y la varianza de  $W$  a partir de su f.g.m.

3. Sea  $X$  una variable aleatoria con f.g.m.

$$M_X(t) = \frac{e^{at}}{1 - bt^2}, \quad -1 < t < 1.$$

Si  $\mathbb{E}(X) = 3$  y  $\text{Var}(X) = 2$ , calcula  $a$  y  $b$ .

4. Sea  $Y$  una variable aleatoria con densidad

$$f_Y(y) = e^y \mathbb{1}_{(-\infty, 0)}(y).$$

a) Calcula  $\mathbb{E}(e^{3Y/2})$ .

b) Obtén  $M_Y(t)$  e indica para qué valores de  $t$  existe.

c) Calcula  $\text{Var}(Y)$  mediante la f.g.m.

5. Sea  $X \sim N(0, 1)$ . Usa el hecho de que, para todo  $k \in \mathbb{R}$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-k)^2/2} dx = \sqrt{2\pi},$$

para obtener la f.g.m. de  $X$ .

6. Sea  $X \sim N(0, 1)$  y sea  $Y$  una variable aleatoria con función de masa

$$\mathbb{P}(Y = -\sqrt{3}) = \mathbb{P}(Y = \sqrt{3}) = \frac{1}{6}, \quad \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{2}{3}.$$

Comprueba que los tres primeros momentos de  $X$  y  $Y$  coinciden. Analiza si esto implica que tienen la misma distribución.

7. Sea  $X$  una variable aleatoria con función de distribución

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0,$$

y define  $Y = \lfloor X \rfloor$ . Obtén la función de masa de  $Y$ .

8. Sea  $U$  una variable aleatoria con densidad

$$f_U(u) = \frac{1}{2} \mathbb{1}_{(-1, 1)}(u).$$

Obtén la función de distribución y la densidad de las siguientes variables:

a)  $Y_1 = |U|$ ;

b)  $Y_2 = U^2 + 1$ ;

c)  $Y_3 = (U + 1)^{-1}$ .

9. Sea  $Y$  una variable aleatoria con densidad

$$f_Y(y) = 2(1 - y) \mathbb{1}_{(0, 1)}(y).$$

Obtén la densidad de

$$U_1 = 2Y - 1, \quad U_2 = 1 - 2Y \quad \text{y} \quad U_3 = Y^2.$$

10. Sea  $X$  una variable aleatoria con densidad  $f_X(x) = \mathbb{1}_{(0,1)}(x)$ . Obtén la densidad de

$$Y = X^{1/\beta}, \quad \beta \neq 0.$$

Distingue los casos  $\beta > 0$  y  $\beta < 0$ .

11. Sea  $X$  una variable aleatoria con densidad  $f_X(x) = e^{-x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$ . Obtén la distribución de

$$Y = \frac{X}{1+X}.$$

12. Sea  $X$  una variable aleatoria continua con densidad

$$f_X(x) = \frac{3}{8}(x+1)^2 \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$$

y define

$$Y = \begin{cases} 1 - X^2, & X \leq 0, \\ 1 - X, & X > 0. \end{cases}$$

Obtén la densidad de  $Y$ . Explica cómo intervienen en el cálculo las distintas ramas de la transformación.

13. Sea  $X$  una variable aleatoria con densidad

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{(a,b)}(x).$$

Obtén la densidad de

$$Y = \frac{X}{b-X}.$$

Determina primero el soporte de  $Y$ .

14. Sea  $\Theta$  una variable aleatoria con densidad

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{(-\pi/2, \pi/2)}(\theta).$$

Para una constante  $A > 0$ , obtén la densidad de  $Y = A \sin \Theta$  y determina su soporte.

15. Se dice que  $W$  tiene una distribución Pareto con parámetros  $\alpha > 0$  y  $\theta > 0$  si

$$f_W(w) = \frac{\alpha \theta^\alpha}{w^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{(\theta, \infty)}(w).$$

Sea  $X$  una variable aleatoria con densidad  $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(x)$  y define  $Y = ce^X$ , donde  $c > 0$ . Verifica que  $Y$  tiene una distribución Pareto e identifica sus parámetros.

16. ★ Sea  $Z \sim N(0, 1)$  y define  $Y = Z^2$ .

- Obtén la densidad de  $Y$  mediante el teorema de cambio de variable.
- Identifica la distribución de  $Y$  y sus parámetros.
- Escribe  $\mathbb{P}(Y > 4)$  en términos de la función de distribución correspondiente. Deja expresado el planteamiento teórico y utiliza un paquete de R únicamente para obtener el valor numérico final. Una respuesta que contenga solo el comando o el resultado de R se considerará incompleta.

17. Sean  $X \sim \text{Gamma}(4, 2)$ , con parámetro de tasa, y  $Y \sim \chi_8^2$ . Determina una constante  $c > 0$  para la cual  $cX$  y  $Y$  tengan la misma distribución. Justifica tu respuesta mediante una transformación y la relación entre ambas familias. Usa después esa relación para expresar  $\mathbb{P}(X > 5)$  como una probabilidad asociada con una variable ji-cuadrada y obtén únicamente el valor numérico final con un paquete de R; conserva explícito todo el planteamiento teórico.

### 7.3. Planteamiento y modelación

1. Un minorista vende 18 marcas de vino, seis de las cuales provienen de una región específica. Un cliente elige cuatro marcas al azar, sin reemplazo. Define la variable aleatoria que cuenta cuántas marcas elegidas provienen de esa región y obtén su función generadora de momentos.
2. El tiempo, en minutos, que tarda una persona en ser atendida en una ventanilla tiene distribución exponencial con tasa  $\lambda$ . La persona debe caminar cinco minutos para llegar a la ventanilla y, una vez atendida, el trámite dura el doble del tiempo de espera. Define una variable aleatoria para el tiempo total transcurrido desde que comienza a caminar hasta que termina el trámite. Obtén su función generadora de momentos e identifica su media y su varianza.
3. Una máquina corta barras cuya longitud  $X$ , medida en metros, tiene densidad

$$f_X(x) = 2x\mathbb{1}_{(0,1)}(x).$$

Cada barra se utiliza para construir un cuadrado, por lo que su área es  $A = X^2/16$ . Obtén la función de distribución y la densidad de  $A$ . Indica el conjunto de valores que puede tomar esta variable.

4. Una antena se instala en el centro de un terreno circular de radio  $R$ . La dirección del cable que la sostiene forma con el suelo un ángulo  $\Theta$  uniformemente distribuido en  $(0, \pi/2)$ . Si la altura alcanzada por el cable es  $H = R \tan \Theta$ , obtén la función de distribución y la densidad de  $H$ . Explica qué valores puede tomar la altura en este modelo.
5. La duración  $X$ , en horas, de una batería tiene distribución exponencial con tasa  $\lambda$ . En la pantalla de un dispositivo se muestra el porcentaje de energía consumida al cabo de  $t$  horas mediante la variable

$$Y = 100 \left( 1 - e^{-X/t} \right),$$

donde  $t > 0$  es fijo. Obtén la función de distribución y la densidad de  $Y$ . Determina además la probabilidad de que el porcentaje mostrado sea mayor que 75.

## 8. Autoevaluación. Variables aleatorias

### 8.2. Cálculo y operaciones numéricas

1. Sea  $X$  una v.a. con función de densidad de probabilidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{10}, & \text{si } -2 < x < 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

- Calcula la función de distribución (acumulada) de  $X$ .
- Calcula la media y la varianza de  $X$ .
- Encuentra los cuantiles de orden 0.25, 0.5 y 0.75 de  $X$ .
- Considera la siguiente variable aleatoria

$$U := \begin{cases} 1 & \text{si } X \geq 0, \\ -1 & \text{si } X < 0. \end{cases}$$

Calcula la función generadora de momentos de  $U$ . ¿Cómo calcularías la media de  $U$ ?

- Calcula la función de densidad de probabilidad de la v.a.  $V := \frac{1}{2}X + 2$ .

2. La función de distribución acumulada de una v.a.  $X$  es

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & \text{si } x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

- Encuentra los cuantiles de orden 0.25, 0.5 y 0.75 de  $X$ .
- Encuentra la f.d.p. de la v.a.  $Y := \alpha + \beta X$ , con  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $\beta > 0$ .
- Sabiendo que la f.g.m. de  $X$  es

$$M_Y(t) = \frac{1}{1-t^2}, \quad |t| < 1,$$

encuentra la función generadora de  $Y$ .

3. Sea  $X \sim N(52, 9)$  y  $Z \sim N(0, 1)$ .

- Utilizando el hecho que  $\mathbb{P}(Z \leq -\frac{2}{3}) = 0.2525$ , calcula  $\mathbb{P}(50 \leq X \leq 54)$ .
- Sea  $Y \sim N(\mu, 9)$ . Sabiendo que  $\mathbb{P}(Y > 55) = 0.75$  y  $\mathbb{P}(Z \leq -0.6745) = 0.25$ , determina el valor de  $\mu$ .

4. Sea  $Z \sim N(0, 1)$  y  $X$  una v.a. definida como sigue

$$X := \begin{cases} 1 & \text{si } Z \leq 0, \\ 2 & \text{si } 0 < Z < 0.8416, \\ 3 & \text{si e.o.c.} \end{cases}$$

Calcula la media de  $X$ , sabiendo que el cuantil 0.2 de  $Z$  es  $-0.8416$ .

5. Sea  $X$  una v.a. con la siguiente función de distribución.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -5, \\ 0.15 & \text{si } -5 \leq x < 2, \\ 0.40 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 0.80 & \text{si } 3 \leq x < 9, \\ 1 & \text{si } x \geq 9. \end{cases}$$

Encuentra la f.m.p. o f.d.p., según sea el caso. Encuentra los cuantiles de orden 0.25, 0.5 y 0.75.

6. Sea  $X$  una v.a. con f.p.m. dada por la siguiente tabla:

|                     |     |     |      |     |     |      |      |      |
|---------------------|-----|-----|------|-----|-----|------|------|------|
| $x$                 | -2  | -1  | 0    | 1   | 2   | 3    | 4    | 5    |
| $\mathbb{P}(X = x)$ | 0.1 | 0.2 | 0.15 | 0.2 | 0.1 | 0.15 | 0.05 | 0.05 |

- a) Encuentra la media, mediana y la moda de  $X$ . ¿Es  $X$  una v.a. simétrica? Justifica la respuesta.
- b) Calcula la varianza de  $X$  usando la ley del estadístico inconsciente.
- c) Calcula la probabilidad de los siguientes eventos:

$$\mathbb{P}(X < 1 \mid X^2 \leq 2), \quad \mathbb{P}(X^2 > 2 \mid X < 1), \quad \mathbb{P}(X < 0 \mid X^2 \geq 1).$$

- d) Sea  $Y(x) := \mathbb{1}_{\{X > 0\}}(x)$ . Calcula la media y la varianza de la v.a.  $W := a - 3bY$ , con  $a, b$  constantes.

## Respuestas

### 0. Nociones básicas de matemáticas

#### 0.1. Álgebra, exponentes e integrales

- 0.1:1. a)  $x = 6$ .  
b)  $x = -4$ .  
c)  $p = q/(1 + q)$ , con  $q \neq -1$ .  
d)  $x = \mu + \sigma y$ .  
e)  $t = (\log y - 1)/2$ .
- 0.1:2. a)  $x^2$ .  
b)  $a^6/b^3$ .  
c)  $e^{2x+2}$ .  
d)  $x^2$ .  
e)  $4/27$ .
- 0.1:3.  $|a| = -a$ ,  $|-a| = -a$  y  $|2a - 1| = 1 - 2a$ .
- 0.1:4. a)  $\frac{1}{2}(1 - 3^{-10})$ .  
b)  $1/2$ .  
c) 5565.
- 0.1:5. a) 20.  
b) 25.  
c) 14.  
d) 1.  
e)  $49/6$ .
- 0.1:6. a)  $g'(x) = 2xf'(x^2)$ .  
b)  $(1 + 3x)e^{3x+2}$ .  
c)  $(-x^2 + 2x - 1)e^{-x}$ .

#### 0.2. Vectores y matrices

- 0.2:1.  $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ .
- 0.2:2.  $\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ .
- 0.2:3.  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ .
- 0.2:4.  $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

0.2:5. a)  $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$ .

b)  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ .

0.2:6. a)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

b)  $(2 \ -1 \ 5)$ .

0.2:7. a) 1.

b) -2.

0.2:8.  $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ .

0.2:9.  $\begin{pmatrix} 19 \\ 12 \end{pmatrix}$ .

## 1. Espacios muestrales y probabilidad

### 1.2. Cálculo y operaciones numéricas

1.2:1. a)  $A \cup B = (-5, 4) \cup [7, 20)$ ,  $A \cap B = \emptyset$  y  $A \cap C = [7, 20)$ .

b)  $A^c = (-\infty, 7) \cup [20, \infty)$ ,  $B^c = (-\infty, -5] \cup [4, \infty)$  y  $C^c = (-\infty, 0)$ .

c)  $(A \cup B)^c = (-\infty, -5] \cup [4, 7) \cup [20, \infty) = A^c \cap B^c$  y  $(A \cap B)^c = \mathbb{R} = A^c \cup B^c$ .

1.2:2.  $\mathbb{P}(A^c \cup B^c) = 0.8$ ,  $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 0.1$ ,  $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.3$  y  $\mathbb{P}(A^c \cup B) = 0.6$ .

1.2:3.  $\mathbb{P}(\{a\}) = \frac{1}{8}$ ,  $\mathbb{P}(\{b\}) = \frac{3}{8}$  y  $\mathbb{P}(\{c\}) = \frac{1}{2}$ .

1.2:4.  $\mathbb{P}(A^c) = 0.8$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.5$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$  y  $\mathbb{P}(A \cup B^c) = 0.7$ .

1.2:5. a) 0.49.

b) 0.28.

1.2:6. a)  $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{7}{10}$ .

b)  $\mathbb{P}(\text{exactamente uno}) = \frac{3}{5}$ .

1.2:7.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{5}{8}$  y  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}$ .

### 1.3. Planteamiento y modelación

1.3:1.  $\Omega = \{15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 48\}$ .

1.3:2. a)  $\Omega = \{M, L\}^4$ , donde  $M$  significa “mayor que la mediana” y  $L$ , “menor o igual que la mediana”;  $|\Omega| = 16$ .

b)  $A = \{\omega : \#M \geq 2\}$ ,  $B = \{\omega : \#M = 2\}$  y  $C = \{\omega : \#L = 1\}$ .

c)  $|A| = 11$ ,  $|B| = 6$  y  $|C| = 4$ .

1.3:3. a)  $\Omega = \{(3), (4), (5), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (2, 1, 3), (2, 1, 4), (2, 1, 5)\}$ .

b)  $A = \{(3), (4), (5)\}$ .

c)  $B = \{(5), (1, 5), (2, 5), (1, 2, 5), (2, 1, 5)\}$ .

d)  $C = \{(3), (4), (5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ .

1.3:4.  $\Omega = \{E, F\}^3$ , donde  $E$  significa éxito y  $F$ , fracaso.

1.3:5. a)  $\frac{5}{12}$ .

b)  $\frac{5}{12}$ .

c)  $\frac{1}{6}$ .

1.3:6.  $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{11}{18}$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{9}$ ,  $\mathbb{P}(A^c) = \frac{7}{12}$  y  $\mathbb{P}(B^c) = \frac{25}{36}$ .

1.3:7. a)  $\frac{1}{4}$ .

b)  $\frac{1}{2}$ .

c)  $\frac{1}{13}$ .

d)  $\frac{1}{52}$ .

e)  $\frac{2}{13}$ .

f)  $\frac{4}{13}$ .

1.3:8. a)  $\frac{7}{25}$ .

b)  $\frac{3}{25}$ .

c)  $\frac{41}{100}$ .

d)  $\frac{19}{100}$ .

1.3:9.  $\Omega = \{1, \dots, 20\}^2$  y  $\mathbb{P}(\text{Joey gana}) = \frac{17}{25} = 0.68$ .

1.3:10. a)  $\Omega = \{A, S\}^4$ .

b)  $\{AASS, ASAS, ASSA, SAAS, SASA, SSAA\}$ .

c)  $\{ASSS, SASS, SSAS, SSSA, SSSS\}$ .

1.3:11.

$$\mathbb{P}(\text{mayoría del ITAM}) = \frac{\binom{21}{4}\binom{19}{2} + \binom{21}{5}\binom{19}{1} + \binom{21}{6}}{\binom{40}{6}} = \frac{367}{962} \approx 0.3815.$$

1.3:12. a)  $\frac{1}{81}$ .

b)  $\frac{1}{27}$ .

c)  $\frac{5}{27}$ .

## 2. Probabilidad condicional e independencia

### 2.2. Cálculo y operaciones numéricas

2.2:1. a)  $1/3$ .

b)  $1/5$ .

c)  $5/7$ .

d)  $1$ .

e)  $1/7$ .

2.2:2.  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.18$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.82$  y  $\mathbb{P}(B | A) = 0.45$ .

2.2:3.  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0.14$ ,  $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.76$ ,  $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 0.06$  y  $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 0.24$ .

2.2:4. a) 0.16.

b) 0.04.

c) 0.94.

d) 0.44.

2.2:5.  $\mathbb{P}(A) = 0.425$ ,  $\mathbb{P}(B_1 | A) = 5/17$ ,  $\mathbb{P}(B_2 | A) = 42/85$  y  $\mathbb{P}(B_3 | A) = 18/85$ .

### 2.3. Planteamiento y modelación

2.3:1. a) 0.38.

b) 0.78.

c)  $9/38 \approx 0.2368$ .

d)  $22/31 \approx 0.7097$ .

e) 0.22.

2.3:2. a) 0.84.

b)  $3/7 \approx 0.4286$ .

2.3:3. a) 0.1575.

b) 0.32.

c)  $63/128 \approx 0.4922$ .

2.3:4.  $1 - p$ .

2.3:5. a)  $528/5915 \approx 0.08926$ .

b)  $9/22 \approx 0.4091$ .

2.3:6.  $285/679 \approx 0.4197$ .

2.3:7. 42.5 %.

2.3:8.  $0.562/0.85978 \approx 0.6537$ .

2.3:9. a)  $117/166 \approx 0.7048$ .

b)  $7/18 \approx 0.3889$ .

2.3:10. a) Árbol binario de tres intentos con probabilidad inicial  $1/2$ ; después de  $D$ , las ramas tienen probabilidades  $p_1$  y  $1 - p_1$ , y después de  $I$ ,  $p_2$  y  $1 - p_2$ .

b)  $(p_1^2 - p_2^2)/2 + p_2$ .

c)  $p_1^2 + (1 - p_1)p_2$ .

2.3:11. a)  $7/16$ .

b)  $13/16$ .

2.3:12.  $14/37 \approx 0.3784$ .

2.3:13. a) Las dos cajas posibles no son igualmente probables: obtener oro es seguro en la primera y tiene probabilidad  $1/2$  en la segunda.

b)  $2/3$ .

2.3:14. a)  $1/3$ .

b)  $1/5$ .

2.3:15.  $30/61 \approx 0.4918$ .

### 3. Autoevaluación. Fundamentos de probabilidad

#### 3.3. Planteamiento y modelación

3.3.1.

$$\mathbb{P}(\text{el autobús llega tarde} \mid \text{hay tráfico}) = \frac{21}{23} \approx 0.9130.$$

3.3.2. a)  $10p^2(1-p)^3$ .

b)  $4p^2(1-p)^3$ .

3.3.3. La probabilidad de que una persona adquiriera una taza es

$$0.66.$$

3.3.4. a)

$$\frac{\binom{6}{2}\binom{9}{8}}{\binom{15}{10}} = \frac{45}{1001} \approx 0.0450.$$

b)  $\frac{8}{15}$ .

3.3.5. a)

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), \\ & (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), \\ & (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5) \}, \end{aligned}$$

y  $|\Omega| = 25$ .

b)

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\},$$

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}.$$

Los eventos  $A$  y  $B$  son independientes.

c)  $\mathbb{P}(A^c \mid B^c) = \frac{4}{5}$ .

### 4. Funciones de masa, densidad y distribución

#### 4.2. Cálculo y operaciones numéricas

4.2.1. a)  $k = 2$ .

b)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ -\frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

c)  $\mathbb{P}(-1/2 < X < 1/2) = 7/16$ .

4.2.2. a)  $\mathbb{P}(1.5 < X \leq 3) = 3/8$  y  $\mathbb{P}(X \geq 3.75) = 31/256$ .

b)

$$f_X(x) = \begin{cases} 1/8, & 0 < x < 2, \\ x/8, & 2 < x < 4, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

4.2:3.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 1 - 2^{-\lfloor x \rfloor}, & x \geq 1. \end{cases}$$

4.2:4.

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

4.2:5.  $k = 1/96$ . La densidad alcanza su máximo en  $y = 6$ .4.2:6. a)  $\int_0^\infty f_X(x) dx = 1$ .b)  $\mathbb{P}(X > t) = 10000/(100 + t)^2$ , para  $t > 0$ .4.2:7. La gráfica une  $(0, 0)$  con  $(1, 1/2)$  mediante una recta y  $(1, 1/2)$  con  $(4, 1)$  mediante  $\sqrt{x}/2$ ; es constante en 0 a la izquierda y en 1 a la derecha.

### 4.3. Planteamiento y modelación

4.3:1. Para  $k = 2, \dots, 7$ ,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{6 \cdot 5 \cdots (6 - k + 2)}{6^{k-1}} \frac{k-1}{6}.$$

Las probabilidades son  $1/6, 5/18, 5/18, 5/27, 25/324, 5/324$ .4.3:2.  $\mathbb{P}(Y = 2) = 1/6$ ,  $\mathbb{P}(Y = 3) = 1/3$  y  $\mathbb{P}(Y = 4) = 1/2$ .4.3:3. a)  $\mathbb{P}(Y \leq y) = \binom{\lfloor y \rfloor}{n} / \binom{r}{n}$ .b)  $\mathbb{P}(Z \geq z) = \binom{r - \lceil z \rceil + 1}{n} / \binom{r}{n}$ .4.3:4.  $\mathbb{P}(Y = 0) = 2/9$ ,  $\mathbb{P}(Y = 1) = 2/3$  y  $\mathbb{P}(Y = 2) = 1/9$ .4.3:5.  $\mathbb{P}(X = 0) = 0.109$ ,  $\mathbb{P}(X = 2) = 0.162$  y  $\mathbb{P}(X = 4) = 0.729$ .4.3:6.  $\mathbb{P}(X = 3) = 1/4$ ,  $\mathbb{P}(X = 4) = 3/8$  y  $\mathbb{P}(X = 5) = 3/8$ .

4.3:7. a)

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{6}{x} \binom{4}{n-x}}{\binom{10}{n}}, \text{ máx}(0, n-4) \leq x \leq n.$$

b)

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} (3/5)^x (2/5)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

4.3:8. a)  $\mathbb{P}(X = x) = (2x - 1)/144$ , para  $x = 1, \dots, 12$ .b)  $\mathbb{P}(X = x) = (x - 1)/66$ , para  $x = 2, \dots, 12$ .

## 5. Variables aleatorias discretas y continuas importantes

### 5.2. Cálculo y operaciones numéricas

5.2:1. 0.250823, 0.633103 y 0.898881.

$$5.2:2. \frac{1 - (1-p)^n - np(1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)^n}.$$

5.2:3. 0.06561, 0.6561 y 0.59049.

5.2:4. 0.055566 y 0.873964.

5.2:5. 0.440493, 0.005453 y 0.601602.

5.2:6. 0.065277, 0.934723 y 0.693571.

5.2:7. 0.8 y 0.2.

5.2:8.  $3/4$ ,  $6/7$  y  $1/2$ .

5.2:9. 0.283469, 0.348652 y 0.513417.

5.2:10. 0.323324, 0.438573 y 0.238103.

5.2:11. 0.866386, 0.024998 y  $c \approx 1.04982$ .

5.2:12. 0.406056 y  $c \approx 960.498$ .

### 5.3. Planteamiento y modelación

5.3:1.  $X \sim \text{Bin}(5, 0.4)$ ;  $\mathbb{P}(X \leq 3) = 0.91296$ .

5.3:2.  $X \sim \text{Bin}(25, 0.8)$ ;  $\mathbb{P}(X = 22) \approx 0.135768$ .

5.3:3.  $X \sim \text{Bin}(30, 0.25)$ ;  $\mathbb{P}(X \geq 18) \approx 0.00005008$ .

5.3:4.  $X \sim \text{Geom}(0.1)$ ;  $\mathbb{P}(X = 5) = 0.06561$  y  $\mathbb{P}(X \geq 5) = 0.6561$ .

5.3:5.  $X_A \sim \text{Pois}(2A)$ ;  $\mathbb{P}(X_2 = 0) \approx 0.018316$  y  $\mathbb{P}(X_4 \geq 3) \approx 0.986246$ .

5.3:6.  $X_t \sim \text{Pois}(5t)$ ;  $\mathbb{P}(X_{1/2} \leq 4) \approx 0.891178$  y  $\mathbb{P}(X_1 \geq 12) \approx 0.005453$ .

5.3:7.  $X \sim \text{Hipergeom}(20, 8, 5)$  y

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\binom{8}{k} \binom{12}{5-k}}{\binom{20}{5}}, & 0 \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

5.3:8.  $X \sim \text{Hipergeom}(30, 10, 6)$ ;  $\mathbb{P}(X \geq 1) \approx 0.934723$ .

5.3:9. Si  $X \sim \text{Unif}(0, L)$  mide la distancia a  $A$ , las probabilidades son  $1/2$  y  $1/4$ .

5.3:10.  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$  y  $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$ .

5.3:11.  $X \sim N(950, 10^2)$ ;  $\mathbb{P}(947 < X < 958) \approx 0.406056$ .

5.3:12. Aproximación normal con corrección por continuidad: 0.925345.

5.3:13. Aproximación normal con corrección por continuidad: 0.941069.

5.3:14. a)  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0.517747.$

b)  $1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491404.$

## 6. Características numéricas de una variable aleatoria

### 6.2. Cálculo y operaciones numéricas

6.2:1.  $\mathbb{E}X = 3, \mathbb{E}(X^2) = 10, \text{Var}(X) = 1, \sigma_X = 1.$

6.2:2.  $\mathbb{E}X = 2/3, \mathbb{E}(X^2) = 1/2, \text{Var}(X) = 1/18, \text{mediana } 1/\sqrt{2}.$

6.2:3.  $\mathbb{E}X = 4/3, \text{Var}(X) = 2/9; \text{cuartiles } 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}.$

6.2:4.  $\mathbb{E}X = 0, \text{mediana } 0, \mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) = 2.$

6.2:5.  $\mathbb{E}(3X - 2) = 16, \text{Var}(3X - 2) = 21.6.$

6.2:6.  $\mathbb{E}X = 10, \text{Var}(X) = 90, m = 14.$

6.2:7.  $\mathbb{E}X = \text{Var}(X) = 5, \mathbb{E}[X(X - 1)] = 25.$

6.2:8.  $\mathbb{E}[(X - 5)^2] = 8.5.$

6.2:9. Media 3, varianza  $4/3$ , mediana 3; cuartiles 2, 3, 4.

6.2:10. Mediana  $3 \log 2$ ; percentil 90,  $3 \log 10$ .

6.2:11. Aproximadamente 930.4004 y 969.5996.

6.2:12.  $\mathbb{E}(2X^2 - 3X + 1) = 18, \text{Var}(5 - 2X) = 16.$

6.2:13.  $\mathbb{E}X = 100; \mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) = \infty.$

6.2:14.  $c = \lambda = \log 2/4$  y  $\mathbb{P}(X > 5) = 2^{-5/4}.$

6.2:15. Cota de Chebyshev:  $\mathbb{P}(|X| \leq a) \geq 2/3$ ; el valor exacto es 1.

6.2:16. a)  $\mathbb{E}(X^3) \geq 15625.$

b)  $\mathbb{E}(\sqrt{X}) \leq 5.$

c)  $\mathbb{E}(\log X) \leq \log 25.$

d)  $\mathbb{E}(e^{-X}) \geq e^{-25}.$

### 6.3. Planteamiento y modelación

- 6.3:1.  $X \sim \text{Bin}(5, 0.4)$ ;  $\mathbb{E}X = 2$ ,  $\text{Var}(X) = 1.2$ .
- 6.3:2.  $X \sim \text{Pois}(2.5)$ ;  $\mathbb{E}X = \text{Var}(X) = 2.5$ .
- 6.3:3.  $X \sim \text{Hipergeom}(20, 8, 5)$ ;  $\mathbb{E}X = 2$ ,  $\text{Var}(X) = 18/19$ .
- 6.3:4. Mediana  $6 \log 2 \approx 4.159$ ; percentil 90,  $6 \log 10 \approx 13.816$  minutos.
- 6.3:5.  $[930.4004, 969.5996]$  mm.
- 6.3:6.  $\mathbb{E}(G) = 60$ ,  $\text{Var}(G) = 29400$ ; favorable en promedio.
- 6.3:7. Prima mínima: 200 pesos.
- 6.3:8.  $\mathbb{E}(V) = 400$ ,  $\sigma_V = 15$ .
- 6.3:9.  $\mathbb{E}(T) = 17/4$ ,  $\text{Var}(T) = 11/16$ .
- 6.3:10.  $\mathbb{E}(X) = 3.24$ ,  $\text{Var}(X) = 1.8144$ .
- 6.3:11. Sin memoria: media 4, desviación  $\sqrt{26}$ ; con memoria y sin repetir puertas: media 2, desviación  $\sqrt{3}$ .
- 6.3:12.  $p = 5/4$  pesos.
- 6.3:13.  $\mathbb{E}(R) = 12000(1 - e^{-1/2}) + 6000(e^{-1/2} - e^{-1}) \approx 6153.68$  pesos.
- 6.3:14. Moda 2, mediana 3, media  $86/19 \approx 4.5263$ , desviación estándar  $\approx 3.2504$  y  $\mathbb{P}(|N - \mathbb{E}N| < 2) = 7/19 \approx 0.3684$ .
- 6.3:15.  $Y = 5.573\bar{3} + (2/3)X$ .
- 6.3:16.  $X \sim \text{Pois}(2.5)$ :  $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-2.5}$ ,  $\mathbb{P}(X = x) = e^{-2.5} 2.5^x / x!$ ,  $\mathbb{E}X = 2.5$ .
- 6.3:17.  $\mathbb{E}(Y) = \infty$ .
- 6.3:18. a)  $\mathbb{E}W = 2455$ .  
b)  $5p^4(1 - p) + p^5 \approx 0.001413$ , donde  $p = \mathbb{P}(\text{Pois}(5) > 7) \approx 0.133372$ .
- 6.3:19.  $\sigma_{x,\text{máx}} \approx 1.0204$  ml.
- 6.3:20. a) 0.01606.  
b) 0.00385.  
c) Aproximadamente 10:41 A.M.
- 6.3:21. 0.93961.
- 6.3:22. 0.0008255.
- 6.3:23. a)  $\mu \approx 54.6307$ ,  $\sigma^2 \approx 110.8064$ .  
b) 7.214 %.  
c)  $Y \sim N(65.0938, 134.0758)$  y  $\mathbb{P}(70 < Y < 80) \approx 0.23690$ .

## 7. Función generadora de momentos y transformaciones de variables aleatorias

### 7.2. Cálculo y operaciones numéricas

7.2:1.  $a = 1/3$ ,  $b = 2/3$  y  $\mathbb{E}(X) = 5/3$ .

7.2:2. a)  $\mathbb{E}(Y) = 3/4$  y  $\text{Var}(Y) = 3/16$ .

b) No es simétrica.

c)  $M_W(t) = e^{-2t}(1 - 1.5t)^{-3}$ , para  $t < 2/3$ .

d)  $\mathbb{E}(W) = 5/2$  y  $\text{Var}(W) = 27/4$ .

7.2:3.  $a = 3$  y  $b = 1$ .

7.2:4. a)  $2/5$ .

b)  $M_Y(t) = 1/(1+t)$ , para  $t > -1$ .

c)  $\text{Var}(Y) = 1$ .

7.2:5.  $M_X(t) = e^{t^2/2}$ .

7.2:6. Los tres primeros momentos son 0, 1, 0 en ambos casos; las distribuciones no son iguales.

7.2:7.  $\mathbb{P}(Y = k) = e^{-\lambda k}(1 - e^{-\lambda})$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots$

7.2:8. a)  $F_{Y_1}(y) = y$  en  $[0, 1]$  y  $f_{Y_1}(y) = \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$ .

b)  $F_{Y_2}(y) = \sqrt{y-1}$  en  $[1, 2]$  y  $f_{Y_2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-1}}\mathbb{1}_{(1,2)}(y)$ .

c)  $F_{Y_3}(y) = 1 - 1/(2y)$  para  $y > 1/2$  y  $f_{Y_3}(y) = \frac{1}{2y^2}\mathbb{1}_{(1/2,\infty)}(y)$ .

7.2:9.  $f_{U_1}(u) = \frac{1-u}{2}\mathbb{1}_{(-1,1)}(u)$ ,  $f_{U_2}(u) = \frac{1+u}{2}\mathbb{1}_{(-1,1)}(u)$  y  $f_{U_3}(u) = \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}}\mathbb{1}_{(0,1)}(u)$ .

7.2:10. Si  $\beta > 0$ ,  $f_Y(y) = \beta y^{\beta-1}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$ . Si  $\beta < 0$ ,  $f_Y(y) = -\beta y^{\beta-1}\mathbb{1}_{(1,\infty)}(y)$ .

7.2:11.  $F_Y(y) = 1 - \exp[-y/(1-y)]$  en  $(0, 1)$  y  $f_Y(y) = \frac{e^{-y/(1-y)}}{(1-y)^2}\mathbb{1}_{(0,1)}(y)$ .

7.2:12.  $f_Y(y) = \left\{ \frac{3[1-\sqrt{1-y}]^2}{16\sqrt{1-y}} + \frac{3}{8}(2-y)^2 \right\} \mathbb{1}_{(0,1)}(y)$ .

7.2:13. Si  $b > 0$ ,  $f_Y(y) = \frac{b}{(b-a)(1+y)^2}\mathbb{1}_{(a/(b-a),\infty)}(y)$ . Si  $b < 0$ , el soporte es  $(-\infty, a/(b-a))$  y el numerador es  $|b|$ . Si  $b = 0$ ,  $Y = -1$  casi seguramente.

7.2:14.  $f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2-y^2}}\mathbb{1}_{(-A,A)}(y)$ .

7.2:15.  $Y \sim \text{Pareto}(\lambda, c)$ .

7.2:16. a)  $f_Y(y) = \frac{e^{-y/2}}{\sqrt{2\pi y}}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$ .

b)  $Y \sim \chi_1^2$ .

c)  $\mathbb{P}(Y > 4) \approx 0.0455003$ .

7.2:17.  $c = 4$  y  $\mathbb{P}(X > 5) = \mathbb{P}(\chi_8^2 > 20) \approx 0.0103361$ .

### 7.3. Planteamiento y modelación

7.3:1.  $N \sim \text{Hipergeom}(18, 6, 4)$  y  $M_N(t) = \sum_{k=0}^4 e^{tk} \binom{6}{k} \binom{12}{4-k} / \binom{18}{4}$ .

7.3:2.  $T = 5 + 2X$ ,  $M_T(t) = e^{5t} \lambda / (\lambda - 2t)$  para  $t < \lambda/2$ ,  $\mathbb{E}(T) = 5 + 2/\lambda$  y  $\text{Var}(T) = 4/\lambda^2$ .

7.3:3.  $A \sim \text{Unif}(0, 1/16)$ ;  $F_A(a) = 16a$  en ese intervalo y  $f_A(a) = 16\mathbb{1}_{(0,1/16)}(a)$ .

7.3:4.  $F_H(h) = \frac{2}{\pi} \arctan(h/R)$  y  $f_H(h) = \frac{2R}{\pi(R^2+h^2)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(h)$ .

7.3:5.  $F_Y(y) = 1 - (1 - y/100)^{\lambda t}$  en  $(0, 100)$ ,  $f_Y(y) = \frac{\lambda t}{100} (1 - y/100)^{\lambda t - 1} \mathbb{1}_{(0,100)}(y)$  y  $\mathbb{P}(Y > 75) = 4^{-\lambda t}$ .

## 8. Autoevaluación. Variables aleatorias

### 8.2. Cálculo y operaciones numéricas

8.2:1. a)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{4-x^2}{20}, & -2 < x < 0, \\ \frac{x^2+4}{20}, & 0 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

b)  $\mathbb{E}(X) = \frac{28}{15}$  y  $\text{Var}(X) = \frac{746}{225}$ .

c)  $q_{0.25} = 1$ ,  $q_{0.5} = \sqrt{6}$  y  $q_{0.75} = \sqrt{11}$ .

d)  $M_U(t) = \frac{4}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{-t}$  y  $\mathbb{E}(U) = M'_U(0) = \frac{3}{5}$ .

e)

$$f_V(v) = \frac{|2v-4|}{5} \mathbf{1}_{(1,4)}(v).$$

8.2:2. a)  $q_{0.25} = -\log 2$ ,  $q_{0.5} = 0$  y  $q_{0.75} = \log 2$ .

b)

$$f_Y(y) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|y-\alpha|}{\beta}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

c)

$$M_Y(t) = \frac{e^{\alpha t}}{1 - \beta^2 t^2}, \quad |t| < \frac{1}{\beta}.$$

8.2:3. a)  $\mathbb{P}(50 \leq X \leq 54) = 0.495$ .

b)  $\mu = 55 + 3(0.6745) = 57.0235$ .

8.2:4.  $\mathbb{E}(X) = 1.7$ .

8.2:5.

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.15, & x = -5, \\ 0.25, & x = 2, \\ 0.40, & x = 3, \\ 0.20, & x = 9, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Además,  $q_{0.25} = 2$ ,  $q_{0.5} = 3$  y  $q_{0.75} = 3$ .

8.2:6. a)  $\mathbb{E}(X) = 0.9$ , la mediana es 1 y las modas son  $-1$  y  $1$ . La distribución no es simétrica.

b)  $\text{Var}(X) = 3.79$ .

c)

$$\mathbb{P}(X < 1 \mid X^2 \leq 2) = \frac{7}{11}, \quad \mathbb{P}(X^2 > 2 \mid X < 1) = \frac{2}{9},$$

$$\mathbb{P}(X < 0 \mid X^2 \geq 1) = \frac{6}{17}.$$

d)

$$\mathbb{E}(W) = a - \frac{33}{20}b, \quad \text{Var}(W) = \frac{891}{400}b^2.$$

## Soluciones

### 0. Nociones básicas de matemáticas

#### 0.1. Álgebra, exponentes e integrales

- 0.1:1. a)  $3x - 7 = 11$  implica  $3x = 18$ , por lo que  $x = 6$ .  
 b) De  $2x - 6 = 5x + 6$  se obtiene  $-3x = 12$ . Por tanto,  $x = -4$ .  
 c) De  $q(1 - p) = p$  se sigue que  $q = p(1 + q)$ . Así,

$$p = \frac{q}{1 + q},$$

siempre que  $q \neq -1$ .

- d) Al multiplicar por  $\sigma$ , se obtiene  $\sigma y = x - \mu$ . Por tanto,

$$x = \mu + \sigma y.$$

- e) Como  $y > 0$ , se puede tomar logaritmo en ambos lados:  $\log y = 2t + 1$ . Por tanto,

$$t = \frac{\log y - 1}{2}.$$

- 0.1:2. a)  $x^7 x^{-3} / x^2 = x^{7-3-2} = x^2$ , para  $x \neq 0$ .  
 b)  $(a^2 b^{-1})^3 = a^6 b^{-3} = a^6 / b^3$ , para  $b \neq 0$ .  
 c)  $e^{3x+2} / e^x = e^{2x+2}$ .  
 d)  $e^{2 \log x} = e^{\log(x^2)} = x^2$ , pues  $x > 0$ .  
 e)  $(1/3)^2 + (1/3)^3 = 1/9 + 1/27 = 4/27$ .

- 0.1:3. Como  $a < 0$ , se tiene  $|a| = -a$ . Además,  $-a > 0$ , de modo que  $|-a| = -a$ . Finalmente,  $2a - 1 < 0$ , por lo que

$$|2a - 1| = -(2a - 1) = 1 - 2a.$$

- 0.1:4. a) Es una suma geométrica de razón  $1/3$ :

$$\sum_{k=1}^{10} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^{10}}\right).$$

- b) La serie geométrica converge porque  $|1/3| < 1$ . Su suma es

$$\frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

- c) Por la fórmula de la suma de los primeros  $n$  enteros positivos,

$$1 + 2 + \cdots + 105 = \frac{105(106)}{2} = 5565.$$

- 0.1:5. a)

$$\int_0^4 (3 + x) dx = \left[3x + \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 20.$$

b)

$$\int_{-2}^3 5 \, dx = 5(3 - (-2)) = 25.$$

c)

$$\int_0^2 (4x^3 - 2x + 1) \, dx = [x^4 - x^2 + x]_0^2 = 14.$$

d) Al hacer el cambio  $u = x - \mu$ , la integral es

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|u|} \, du = \frac{1}{2} \left( \int_{-\infty}^0 e^u \, du + \int_0^{\infty} e^{-u} \, du \right) = 1.$$

e) Se separa la integral en  $x = 1$ :

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 x^2 |x - 1| \, dx &= \int_{-2}^1 x^2 (1 - x) \, dx + \int_1^2 x^2 (x - 1) \, dx \\ &= \frac{27}{4} + \frac{17}{12} = \frac{49}{6}. \end{aligned}$$

0.1:6. a) Por la regla de la cadena,

$$g'(x) = 2x f'(x^2).$$

b) Por la regla del producto,

$$\frac{d}{dx} (x e^{3x+2}) = e^{3x+2} + 3x e^{3x+2} = (1 + 3x) e^{3x+2}.$$

c)

$$\frac{d}{dx} ((x^2 + 1) e^{-x}) = 2x e^{-x} - (x^2 + 1) e^{-x} = (-x^2 + 2x - 1) e^{-x}.$$

## 0.2. Vectores y matrices

0.2:1.

$$Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

0.2:2.

$$By = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

0.2:3.

$$Cz = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

0.2:4.

$$Dw = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

0.2:5. a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

0.2:6. a)

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}^T = (2 \quad -1 \quad 5).$$

0.2:7. a)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 1(4) + (-2)(0) + 3(-1) = 1.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2(-3) + 1(4) = -2.$$

0.2:8. El determinante es  $3(1) - 2(2) = -1$ . Por tanto,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

En efecto,

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

0.2:9.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

## 1. Espacios muestrales y probabilidad

### 1.1. Comprensión teórica

- 1.1:1. Un fenómeno determinístico produce el mismo resultado siempre que se repiten las mismas condiciones y, por tanto, su resultado puede predecirse exactamente a partir de ellas. En un fenómeno aleatorio, aun cuando se mantienen las condiciones observables, el resultado particular no puede conocerse de antemano; solo pueden describirse sus posibles resultados y asignar probabilidades a los eventos de interés.
- 1.1:2. El rendimiento de un portafolio puede considerarse un fenómeno aleatorio porque su valor futuro no se conoce con certeza. Entre sus fuentes de incertidumbre se encuentran las variaciones en los precios de los activos, las tasas de interés y de cambio, las noticias sobre las empresas, las condiciones macroeconómicas y las decisiones de otros participantes del mercado. Aunque el rendimiento observado se calcula de manera determinística una vez conocidos los precios, esos precios futuros son inciertos.

- 1.1:3. El número de transacciones fallidas durante un día es aleatorio. Puede variar por fallas de la red o de los servidores, errores de software, congestión del sistema, problemas con los medios de pago y acciones de las personas usuarias. Antes de terminar el día se conocen los valores posibles, pero no cuál de ellos se observará.
- 1.1:4. La tasa de desempleo durante una recesión se modela como un fenómeno aleatorio porque depende de numerosas variables cuyo comportamiento futuro no se conoce con exactitud: cierres y aperturas de empresas, decisiones de contratación, duración de la recesión, políticas públicas y cambios en la participación laboral. Una vez reunidos los datos, el cálculo de la tasa es determinístico, pero su valor futuro es incierto.
- 1.1:5. La aceptación de un producto es un fenómeno aleatorio. Depende, entre otros factores, de las preferencias de los consumidores, el precio, la publicidad, la calidad percibida, la respuesta de la competencia y el entorno económico. El emprendedor puede estudiar estos factores y construir un modelo, pero no determinar de antemano la respuesta de cada consumidor.
- 1.1:6. a) La tasa de inflación futura es aleatoria: depende de precios, expectativas, política monetaria, oferta y demanda, entre otros factores inciertos.
- b) El tiempo de procesamiento de una transacción bancaria es aleatorio, pues puede variar con la carga del sistema, la red y otros retrasos operativos.
- c) En las condiciones ideales indicadas es determinístico. El tiempo es distancia entre velocidad:
- $$t = \frac{5 \text{ km}}{50 \text{ km/h}} = 0.1 \text{ h} = 6 \text{ minutos.}$$
- d) El resultado de la bolsa al cierre de un día es aleatorio porque depende de numerosas decisiones y de información que aparece durante la jornada.
- e) Bajo una presión atmosférica fija y las demás condiciones físicas controladas, la temperatura de ebullición es determinística.
- 1.1:7. a)  $A \cup B$  es el evento en el que ocurre  $A$ , ocurre  $B$  o ocurren ambos.
- b)  $A \cap B$  es el evento en el que ocurren simultáneamente  $A$  y  $B$ .
- c)  $A^c$  es el evento en el que no ocurre  $A$ .
- 1.1:8. El espacio muestral es  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , y  $A = \{2, 4, 6\}$  y  $B = \{4, 5, 6\}$ .
- a)  $A \cup B$  significa que el resultado es par o mayor que 3;  $A \cap B$ , que es par y mayor que 3; y  $A^c$ , que no es par.
- b)
- $$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}, \quad A \cap B = \{4, 6\}, \quad A^c = \{1, 3, 5\}.$$
- c) Para que ocurra  $A \cup B$  basta con que se cumpla al menos una de las dos condiciones. Para que ocurra  $A \cap B$  deben cumplirse las dos al mismo tiempo.
- 1.1:9. a) Comprar al menos uno de los artículos es  $A \cup B$ .
- b) Comprar ambos artículos es  $A \cap B$ .
- c) No comprar un libro es  $A^c$ .
- d) No comprar ninguno es  $A^c \cap B^c$ . Este evento coincide con  $(A \cup B)^c$  por la ley de De Morgan: que no ocurra la compra de al menos uno significa que no ocurre ninguna de las dos compras.

1.1:10. No existe una única modelación correcta; una posible respuesta es la siguiente.

- a) Un modelo continuo suele ser más conveniente si los escenarios se describen mediante variables como crecimiento, inflación y desempleo, que toman valores en intervalos. Un modelo discreto también puede usarse si solo interesan categorías previamente definidas.
- b) Si  $A$  es el evento “la economía mundial crece durante el próximo año”, entonces  $A^c$  es “la economía mundial no crece durante el próximo año”.
- c) Una partición posible es: crecimiento positivo, crecimiento nulo y crecimiento negativo. Estas categorías cubren el espacio muestral y no se traslapan.
- d) Tres eventos mutuamente excluyentes pueden ser “el crecimiento es mayor que 2%”, “el crecimiento está entre 0% y 2%” y “el crecimiento es negativo”. Ningún escenario puede pertenecer a dos de estos eventos simultáneamente.

1.1:11. El coeficiente  $\binom{n}{k}$  representa el número de subconjuntos de  $k$  elementos que pueden elegirse de un conjunto de  $n$  elementos, sin importar el orden. Elegir los  $k$  elementos incluidos equivale a elegir los  $n - k$  elementos excluidos; por ello,

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Para justificar la segunda identidad, fija un elemento del conjunto. Las selecciones de  $k$  elementos se separan en dos clases disjuntas: si el elemento fijado no se elige, los  $k$  elementos se escogen entre los otros  $n - 1$ , lo que puede hacerse de  $\binom{n-1}{k}$  formas; si se elige, faltan  $k - 1$  elementos por escoger entre los otros  $n - 1$ , lo que puede hacerse de  $\binom{n-1}{k-1}$  formas. En consecuencia,

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

1.1:12. Un espacio muestral continuo es apropiado porque el precio puede modelarse, dentro de cierto rango, mediante cualquier valor real y no solo mediante una lista finita de posibilidades. Por ejemplo, si  $S$  es el precio futuro, un evento de interés es  $\{S > 100\}$ : “el precio de la acción supera 100 unidades monetarias”. En la práctica los precios se registran con una precisión mínima, pero el modelo continuo suele ser una aproximación útil.

1.1:13. Para cada cara se espera que la frecuencia relativa se aproxime a  $1/6$  conforme aumenta el número de lanzamientos. Esta interpretación corresponde al enfoque frecuentista: la probabilidad de un resultado se relaciona con el valor límite de su frecuencia relativa en una sucesión larga de repeticiones del experimento bajo las mismas condiciones. Con solo 30 lanzamientos las frecuencias pueden diferir de  $1/6$ .

## 1.2. Cálculo y operaciones numéricas

1.2:1. Como  $A = [7, 20)$ ,  $B = (-5, 4)$  y  $C = [0, \infty)$ :

- a) Los conjuntos  $A$  y  $B$  son disjuntos y  $A \subset C$ . Por tanto,

$$A \cup B = (-5, 4) \cup [7, 20), \quad A \cap B = \emptyset, \quad A \cap C = [7, 20).$$

- b) Tomando a  $\mathbb{R}$  como conjunto universal,

$$A^c = (-\infty, 7) \cup [20, \infty), \quad B^c = (-\infty, -5] \cup [4, \infty), \quad C^c = (-\infty, 0).$$

c) Puesto que

$$(A \cup B)^c = (-\infty, -5] \cup [4, 7) \cup [20, \infty),$$

se obtiene el mismo conjunto al calcular  $A^c \cap B^c$ . Además,  $A \cap B = \emptyset$ , de modo que

$$(A \cap B)^c = \mathbb{R} = A^c \cup B^c.$$

1.2:2. Por De Morgan,

$$\mathbb{P}(A^c \cup B^c) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B) = 1 - 0.2 = 0.8.$$

Además,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 0.6 + 0.5 - 0.2 = 0.9,$$

y por ello  $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = 1 - 0.9 = 0.1$ . Las regiones restantes satisfacen

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = 0.3$$

y

$$\mathbb{P}(A^c \cup B) = 1 - \mathbb{P}(A \cap B^c) = 1 - [\mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)] = 1 - 0.4 = 0.6.$$

1.2:3. Escribe  $p_a = \mathbb{P}(\{a\})$ ,  $p_b = \mathbb{P}(\{b\})$  y  $p_c = \mathbb{P}(\{c\})$ . Entonces

$$p_a + p_c = \frac{5}{8}, \quad p_b + p_c = \frac{7}{8}, \quad p_a + p_b + p_c = 1.$$

Al sumar las dos primeras igualdades y restar la tercera se obtiene  $p_c = \frac{1}{2}$ . En consecuencia,

$$p_a = \frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad p_b = \frac{7}{8} - \frac{1}{2} = \frac{3}{8}.$$

1.2:4. Como  $A \cap B = \emptyset$ ,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - 0.2 = 0.8, \quad \mathbb{P}(A \cup B) = 0.2 + 0.3 = 0.5, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0.$$

Asimismo,  $(A \cup B^c)^c = A^c \cap B = B$ , pues  $B \subset A^c$ . Por tanto,

$$\mathbb{P}(A \cup B^c) = 1 - \mathbb{P}(B) = 0.7.$$

1.2:5. Denota por  $T, C, R$  la compra de traje, camisa y corbata. Por inclusión-exclusión,

$$\mathbb{P}(T \cup C \cup R) = 0.22 + 0.30 + 0.28 - 0.11 - 0.14 - 0.10 + 0.06 = 0.51.$$

a) La probabilidad de no comprar ningún artículo es

$$1 - 0.51 = 0.49.$$

b) Las probabilidades de comprar únicamente cada artículo son

$$\mathbb{P}(\text{solo } T) = 0.22 - 0.11 - 0.14 + 0.06 = 0.03,$$

$$\mathbb{P}(\text{solo } C) = 0.30 - 0.11 - 0.10 + 0.06 = 0.15,$$

$$\mathbb{P}(\text{solo } R) = 0.28 - 0.14 - 0.10 + 0.06 = 0.10.$$

Luego,  $\mathbb{P}(\text{exactamente uno}) = 0.03 + 0.15 + 0.10 = 0.28$ .

1.2:6. Como  $A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$  es una unión disjunta,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{10}.$$

De manera análoga,

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{1}{10}.$$

a)

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} = \frac{7}{10}.$$

b)

$$\mathbb{P}(\text{exactamente uno}) = \mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A^c \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{3}{5}.$$

1.2:7. El cuadrado unitario tiene área uno, así que las probabilidades son las áreas correspondientes. El triángulo  $A$  tiene área  $1/2$  y el rectángulo  $B$  también. Para la intersección,

$$\text{Área}(A \cap B) = \int_0^{1/2} x \, dx + \int_{1/2}^1 \frac{1}{2} \, dx = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}.$$

Por inclusión-exclusión,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}.$$

### 1.3. Planteamiento y modelación

1.3:1. Cada resultado consiste en elegir un número de cada par. Los  $2^3 = 8$  resultados elementales generan los productos

$$\Omega = \{15, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 48\}.$$

Esto debido a que

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdot 5 &= 15, & 1 \cdot 3 \cdot 6 &= 18, \\ 1 \cdot 4 \cdot 5 &= 20, & 1 \cdot 4 \cdot 6 &= 24, \\ 2 \cdot 3 \cdot 5 &= 30, & 2 \cdot 3 \cdot 6 &= 36, \\ 2 \cdot 4 \cdot 5 &= 40, & 2 \cdot 4 \cdot 6 &= 48. \end{aligned}$$

1.3:2. Representa por  $M$  un ingreso mayor que la mediana y por  $L$  un ingreso menor o igual que ella.

a) Cada familia aporta una de dos posibilidades, de modo que

$$\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{M, L\}\}, \quad |\Omega| = 2^4 = 16.$$

b) Los eventos pueden escribirse como

$$A = \{\omega : \#M \geq 2\}, \quad B = \{\omega : \#M = 2\}, \quad C = \{\omega : \#L = 1\}.$$

c) Mediante coeficientes binomiales,

$$|A| = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 11, \quad |B| = \binom{4}{2} = 6, \quad |C| = \binom{4}{1} = 4.$$

1.3.3. El proceso termina cuando aparece por primera vez uno de los libros 3, 4, 5. Antes de él pueden aparecer ninguno, uno o los dos libros 1, 2:

a)

$$\Omega = \{(3), (4), (5), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \\ (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (2, 1, 3), (2, 1, 4), (2, 1, 5)\}.$$

b) Examinar exactamente un libro significa obtener de inmediato una segunda impresión:  $A = \{(3), (4), (5)\}$ .

c) El libro 5 debe ser el último de la secuencia:

$$B = \{(5), (1, 5), (2, 5), (1, 2, 5), (2, 1, 5)\}.$$

d) Al excluir las secuencias que contienen al libro 1,

$$C = \{(3), (4), (5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}.$$

1.3.4. Si  $E$  representa éxito y  $F$  fracaso, cada producto tiene dos resultados posibles. Por tanto,

$$\Omega = \{EEE, EEF, EFE, EFF, FEE, FEF, FFE, FFF\}.$$

1.3.5. Los 36 pares ordenados de  $\{1, \dots, 6\}^2$  son equiprobables.

a) Hay  $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$  pares cuyo segundo componente es mayor que el primero. Así, la probabilidad buscada es  $15/36 = 5/12$ .

b) Las sumas primas son 2, 3, 5, 7, 11, con respectivamente 1, 2, 4, 6, 2 pares. Luego, la probabilidad del evento de interés es  $(1 + 2 + 4 + 6 + 2)/36 = 5/12$ .

c) Hay seis pares con primer componente igual a 6. Por tanto,  $6/36 = 1/6$  es la respuesta.

1.3.6. Notamos que el evento  $A$  esta dada por

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1), \\ (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), (5, 6), (6, 5)\}.$$

Luego  $|A| = 15$ . Para que aparezca al menos un 6,  $|B| = 6 + 6 - 1 = 11$ . Los resultados de  $A \cap B$  son

$$(6, 1), (1, 6), (6, 5), (5, 6),$$

por lo que  $|A \cap B| = 4$ . En consecuencia,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{15 + 11 - 4}{36} = \frac{11}{18}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9},$$

y, por complemento,

$$\mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{15}{36} = \frac{7}{12}, \quad \mathbb{P}(B^c) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}.$$

1.3.7. Una baraja inglesa tiene 52 cartas equiprobables: 13 por figura, 26 de cada color y cuatro de cada valor.

a) Hay 13 espadas:  $13/52 = 1/4$ .

- b) Hay 26 cartas negras:  $26/52 = 1/2$ .  
 c) Hay cuatro sietes:  $4/52 = 1/13$ .  
 d) Hay un ocho de tréboles:  $1/52$ .  
 e) Las letras son J, Q, K y A. En las dos figuras rojas hay  $4(2) = 8$  cartas:  $8/52 = 2/13$ .  
 f) Los números primos entre 2 y 10 son 2, 3, 5, 7. Hay  $4(4) = 16$  cartas:  $16/52 = 4/13$ .
- 1.3:8. De los 300 trabajadores,  $300 - (21 + 15 + 84 + 45 + 12) = 123$  llegaron en transporte público o caminando.
- a)  $84/300 = 7/25$ .  
 b)  $(21 + 15)/300 = 3/25$ .  
 c)  $123/300 = 41/100$ .  
 d)  $(45 + 12)/300 = 19/100$ .
- 1.3:9. El espacio muestral es  $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{1, \dots, 20\}\}$  y contiene  $20^2 = 400$  pares equiprobables. Sea  $G = \{(j, c) : |j - c| > 3\}$ . Conviene contar su complemento  $G^c = \{(j, c) : |j - c| \leq 3\}$ . Para cada  $j$ :

$$\#\{c : |j - c| \leq 3\} = \begin{cases} 4, & j = 1, 20, \\ 5, & j = 2, 19, \\ 6, & j = 3, 18, \\ 7, & j = 4, \dots, 17. \end{cases}$$

$$|G^c| = 2(4 + 5 + 6) + 14(7) = 128, \quad |G| = 400 - 128 = 272.$$

Así,

$$\mathbb{P}(G) = \frac{272}{400} = \frac{17}{25} = 0.68.$$

- 1.3:10. Denota águila por  $A$  y sol por  $S$ .

- a)  $\Omega = \{(x, y) : x, y \in \{A, S\}\}$  tiene  $2^4 = 16$  elementos.  
 b) Ambas caras aparecen el mismo número de veces cuando hay dos águilas y dos soles:

$$\{AASS, ASAS, ASSA, SAAS, SASA, SSAA\}.$$

- c) Aparece sol más veces cuando hay tres o cuatro soles:

$$\{ASSS, SASS, SSAS, SSSA, SSSS\}.$$

- 1.3:11. Para que los egresados del ITAM sean mayoría en un equipo de seis, deben seleccionarse 4, 5 o 6 de los 21 egresados. El número total de equipos es  $\binom{40}{6}$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{mayoría del ITAM}) &= \frac{\binom{21}{4}\binom{19}{2} + \binom{21}{5}\binom{19}{1} + \binom{21}{6}\binom{19}{0}}{\binom{40}{6}} \\ &= \frac{367}{962} \approx 0.3815. \end{aligned}$$

- 1.3:12. ■ Solución Laboratorista. Sea  $x_K, y_K, z_K$  y  $w_K$  el número que los catadores  $X, Y, Z$ , y  $W$  asignan, respectivamente, al vino  $K$ , con  $K = A, F$  o  $E$  ( $A$  siendo el vino Argentino,  $F$  el Francés y  $E$  el español) y sea  $K_j$  el evento de que el vino  $k$  reciba una calificación total  $j$ , véase que

a) Buscamos determinar

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{\#A_4}{\#\Omega_A}$$

Nótese que, por un lado  $A_4$  implica que  $x_A + y_A + z_A + w_A = 4$  y esto es posible si y solo si  $x_A, y_A, z_A, w_A = 1$ ,

pues  $x_A, y_A, z_A, w_A \in \{1, 2, 3\}$ , consecuentemente  $\#A_4 = 1$

Por el otro lado,  $\#\Omega_A$  representa todas las combinaciones de valores que pueden tomar  $x_A, y_A, z_A$  y  $w_A$ ,

de nuevo, como  $x_A, y_A, z_A, w_A \in \{1, 2, 3\}$ , tenemos que  $\#\Omega_A = 3^4$  (pues hay 4 catadores que pueden asignarle al vino Argentino 3 posibles números distintos). Obteiendo que

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{81}$$

b) Nótese que un catador no puede asignar un mismo número a distintos vinos (es decir,  $x_A \neq x_F \neq x_E$  y lo mismo para los demás catadores), por lo tanto, solo puede suceder que el vino Argentino, el vino Francés o el vino Español reciba una calificación de 4. En concreto, estos tres eventos son independientes. Ahora bien, tenemos que

$$\mathbb{P}(A_4 \cup F_4 \cup E_4) = \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(F_4) + \mathbb{P}(E_4)$$

Dado que las calificaciones se asignan aleatoriamente, estos eventos, además, son equiprobables, es decir  $\mathbb{P}(A_4) = \mathbb{P}(F_4) = \mathbb{P}(E_4) = \frac{1}{81}$ , como vimos en el inciso anterior. De esta forma, resulta que

$$\mathbb{P}(A_4 \cup F_4 \cup E_4) = \frac{1}{81} + \frac{1}{81} + \frac{1}{81} = \frac{3}{81}$$

c) Primero encontremos la probabilidad que que uno de los vinos reciba una calificación menor o igual a 5, pues, por independencia y equiprobabilidad, será la misma para los demás. Entonces, buscamos  $A_{\leq 5}$ , lo cual implica que  $x_A + y_A + z_A + w_A \leq 5$ . Nótese que esto es posible si y solo si  $x_A + y_A + z_A + w_A = 4$  o si  $x_A + y_A + z_A + w_A = 5$ . Estos dos casos, de nuevo, son eventos independientes, por lo tanto, obtenemos que

$$\mathbb{P}(A_{\leq 5}) = \mathbb{P}(A_4) + \mathbb{P}(A_5)$$

por el inciso a), sabemos que  $\mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{81}$ .

Ahora analicemos el segundo caso.

$x_A + y_A + z_A + w_A = 5$ , con  $x_A, y_A, z_A, w_A \in \{1, 2, 3\}$  implica que de los 4 catadores 3 indicaron que el vino Argentino era el mejor y solamente uno lo puso en segundo lugar, lo cual sucede con probabilidad

$$\mathbb{P}(A_5) = \binom{4}{1} \left(\frac{1}{4}\right)^4 = \frac{4}{81}$$

Finalmente, resulta que

$$\mathbb{P}(A_{\leq 5}) = \frac{1}{81} + \frac{4}{81} = \frac{5}{81}$$

De nuevo, por independencia y equiprobabilidad, tenemos que

$$\mathbb{P}(A_{\leq 5} \cup F_{\leq 5} \cup E_{\leq 5}) = \mathbb{P}(A_{\leq 5}) + \mathbb{P}(F_{\leq 5}) + \mathbb{P}(E_{\leq 5}) = \frac{5}{81} + \frac{5}{81} + \frac{5}{81} = \frac{15}{81}$$

- Cada catador puede ordenar los tres vinos de  $3! = 6$  maneras; por independencia hay  $6^4$  resultados equiprobables.

- a) Para que Argentina obtenga total 4, los cuatro catadores deben asignarle 1. Cada catador lo coloca primero con probabilidad  $1/3$ , así que

$$\mathbb{P}(\text{Argentina suma } 4) = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}.$$

- b) Los eventos en que Argentina, España o Francia suman 4 son mutuamente excluyentes. Por simetría,

$$\mathbb{P}(\text{algún vino suma } 4) = 3 \left(\frac{1}{81}\right) = \frac{1}{27}.$$

- c) Un vino suma a lo más 5 si recibe  $(1, 1, 1, 1)$  o una permutación de  $(2, 1, 1, 1)$ . Fijadas sus posiciones, los otros dos vinos pueden intercambiarse para cada catador. Esto da

$$2^4 + 4(2^4) = 80$$

ordenamientos de los  $6^4 = 1296$  posibles para un vino dado. Dos vinos no pueden sumar simultáneamente a lo más 5, pues entre los tres vinos la suma total es  $4(1 + 2 + 3) = 24$  y el tercero puede sumar a lo más 12. Por simetría,

$$\mathbb{P}(\text{algún vino suma a lo más } 5) = 3 \left(\frac{80}{1296}\right) = \frac{5}{27}.$$

## 2. Probabilidad condicional e independencia

### 2.1. Comprensión teórica

- 2.1:1. Si  $\mathbb{P}(B) > 0$ , la probabilidad condicional de  $A$  dado  $B$  se define como

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

La condición  $\mathbb{P}(B) > 0$  es necesaria porque se restringe el espacio muestral al evento  $B$  y se normalizan las probabilidades dividiendo entre  $\mathbb{P}(B)$ . Si  $\mathbb{P}(B) = 0$ , el cociente no está definido.

- 2.1:2.  $\mathbb{P}(A | B)$  mide la probabilidad de que ocurra  $A$  cuando se sabe que ocurrió  $B$ . La información nueva puede cambiar tanto los casos posibles como sus probabilidades. Por ello, en general,  $\mathbb{P}(A | B) \neq \mathbb{P}(A)$ . La igualdad se verifica cuando  $A$  y  $B$  son independientes, siempre que  $\mathbb{P}(B) > 0$ .

- 2.1:3. En general,  $\mathbb{P}(A | B)$  y  $\mathbb{P}(B | A)$  no coinciden porque tienen distintos eventos condicionantes. Por ejemplo, al lanzar un dado justo, sea  $A = \{2, 4, 6\}$  y  $B = \{6\}$ . Entonces

$$\mathbb{P}(A | B) = 1, \quad \mathbb{P}(B | A) = \frac{1}{3}.$$

- 2.1:4. Para dos eventos, la regla de multiplicación es

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B)\mathbb{P}(B),$$

si  $\mathbb{P}(B) > 0$ . También puede escribirse como  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B | A)\mathbb{P}(A)$  si  $\mathbb{P}(A) > 0$ . Para tres eventos,

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A | B \cap C)\mathbb{P}(B | C)\mathbb{P}(C),$$

siempre que las probabilidades condicionales estén definidas.

2.1:5. Los eventos  $A$  y  $B$  son independientes cuando conocer la ocurrencia de uno no modifica la probabilidad del otro; equivalentemente,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$ . Son mutuamente excluyentes cuando no pueden ocurrir simultáneamente, es decir,  $A \cap B = \emptyset$ . Si ambos tienen probabilidad positiva y fueran mutuamente excluyentes, entonces  $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$ , mientras que  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$ ; por tanto, no podrían ser independientes.

2.1:6. Tres condiciones equivalentes, cuando las probabilidades condicionales involucradas están definidas, son

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A), \quad \mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B).$$

La primera puede utilizarse sin suponer que  $\mathbb{P}(A) > 0$  o  $\mathbb{P}(B) > 0$ . La segunda requiere  $\mathbb{P}(B) > 0$  y la tercera,  $\mathbb{P}(A) > 0$ .

- 2.1:7. a) No necesariamente. Las hipótesis implican  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$  y  $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$ , que pueden ser distintas si  $\mathbb{P}(B) \neq \mathbb{P}(C)$ .
- b) No necesariamente. La independencia de  $A$  con cada uno de los otros eventos no determina la relación entre  $B$  y  $C$ .
- c) No necesariamente. Por ejemplo, al lanzar dos monedas justas, sea  $A$  el evento de que la primera sea águila y tome  $B = C$  como el evento de que la segunda sea águila. Entonces  $A$  es independiente de  $B$  y de  $C$ , pero  $B$  y  $C$  no son independientes porque son el mismo evento y su probabilidad no es 0 ni 1.

2.1:8. Los eventos  $A$ ,  $B$  y  $C$  son independientes por pares si

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B), \quad \mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C), \quad \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

Son mutuamente independientes si, además de las tres igualdades anteriores, se cumple

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C).$$

La independencia por pares no basta para garantizar esta última igualdad.

2.1:9. Si  $B_1, \dots, B_n$  es una partición de  $\Omega$  y  $\mathbb{P}(B_i) > 0$  para todo  $i$ , entonces

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

La partición separa  $A$  en los eventos disjuntos  $A \cap B_i$ , que cubren todas las maneras en que  $A$  puede ocurrir.

2.1:10. Si  $B_1, \dots, B_n$  es una partición,  $\mathbb{P}(B_i) > 0$  y  $\mathbb{P}(A) > 0$ , el teorema de Bayes establece que

$$\mathbb{P}(B_j | A) = \frac{\mathbb{P}(A | B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A | B_i)\mathbb{P}(B_i)}.$$

Así, una probabilidad de la causa  $B_j$  dado el resultado  $A$  se obtiene a partir de la probabilidad del resultado dado cada causa y de las probabilidades iniciales de las causas.

2.1:11. La sensibilidad  $\mathbb{P}(+ | E)$  no determina por sí sola  $\mathbb{P}(E | +)$ . También se necesitan la prevalencia  $\mathbb{P}(E)$  y la tasa de falsos positivos  $\mathbb{P}(+ | E^c)$ . En efecto,

$$\mathbb{P}(E | +) = \frac{\mathbb{P}(+ | E)\mathbb{P}(E)}{\mathbb{P}(+ | E)\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(+ | E^c)\mathbb{P}(E^c)}.$$

## 2.2. Cálculo y operaciones numéricas

2.2:1. Como  $\mathbb{P}(A \cup B) = 0.5 + 0.3 - 0.1 = 0.7$ ,

a)  $\mathbb{P}(A \mid B) = 0.1/0.3 = 1/3$ .

b)  $\mathbb{P}(B \mid A) = 0.1/0.5 = 1/5$ .

c)  $\mathbb{P}(A \mid A \cup B) = 0.5/0.7 = 5/7$ , pues  $A \cap B \subseteq A$ .

d)  $\mathbb{P}(A \mid A \cap B) = 1$ .

e)  $\mathbb{P}(A \cap B \mid A \cup B) = 0.1/0.7 = 1/7$ .

2.2:2. De  $\mathbb{P}(A \mid B) = 0.3$  se obtiene

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0.3(0.6) = 0.18.$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 0.4 + 0.6 - 0.18 = 0.82, \quad \mathbb{P}(B \mid A) = \frac{0.18}{0.4} = 0.45.$$

2.2:3. Por independencia,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = (0.7)(0.2) = 0.14,$$

$$\mathbb{P}(A \cup B) = 0.7 + 0.2 - 0.14 = 0.76,$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B) = (0.3)(0.2) = 0.06,$$

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = (0.3)(0.8) = 0.24.$$

2.2:4. a)  $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = (0.4)(0.5)(0.8) = 0.16$ .

b)  $\mathbb{P}(A \cap B^c \cap C^c) = (0.4)(0.5)(0.2) = 0.04$ .

c)

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = 1 - (0.6)(0.5)(0.2) = 0.94.$$

d) La probabilidad de que ocurran exactamente dos es

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}(A \cap B \cap C^c) + \mathbb{P}(A \cap B^c \cap C) + \mathbb{P}(A^c \cap B \cap C) \\ &= (0.4)(0.5)(0.2) + (0.4)(0.5)(0.8) + (0.6)(0.5)(0.8) = 0.44. \end{aligned}$$

2.2:5. Por probabilidad total,

$$\mathbb{P}(A) = (0.25)(0.50) + (0.60)(0.35) + (0.60)(0.15) = 0.425.$$

Aplicando Bayes,

$$\mathbb{P}(B_1 \mid A) = \frac{0.125}{0.425} = \frac{5}{17},$$

$$\mathbb{P}(B_2 \mid A) = \frac{0.21}{0.425} = \frac{42}{85}, \quad \mathbb{P}(B_3 \mid A) = \frac{0.09}{0.425} = \frac{18}{85}.$$

## 2.3. Planteamiento y modelación

2.3:1. Sea  $J$  el evento de pertenecer a la población joven y  $T$  el de usar tarjeta de crédito. De la tabla,  $\#J = 38$ ,  $\#T = 69$  y  $\#(J \cap T) = 29$ .

a)  $\mathbb{P}(J) = 38/100 = 0.38$ .

b)  $\mathbb{P}(J \cup T) = (38 + 69 - 29)/100 = 0.78$ .

c)  $\mathbb{P}(T^c | J) = 9/38$ .

d)  $\mathbb{P}(J^c | T^c) = 22/31$ .

e)  $J^c$  es la población adulta, así que  $\mathbb{P}(J^c \cap T^c) = 22/100 = 0.22$ .

2.3:2. Sean  $A$  y  $B$  los eventos de usar cada teléfono, y  $C$  el de que la llamada se conecte. Por probabilidad total,

$$\mathbb{P}(C) = (0.80)(0.60) + (0.90)(0.40) = 0.84.$$

Por Bayes,

$$\mathbb{P}(B | C) = \frac{(0.90)(0.40)}{0.84} = \frac{3}{7}.$$

2.3:3. Sea  $B$  el evento de que la venta de maquillaje sea buena y  $A$  el de que aumenten las ventas de polvo translúcido.

a)  $\mathbb{P}(B \cap A) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) = (0.45)(0.35) = 0.1575$ .

b)

$$\mathbb{P}(A) = (0.45)(0.35) + (0.25)(0.65) = 0.32.$$

c)

$$\mathbb{P}(B | A) = \frac{0.1575}{0.32} = \frac{63}{128} \approx 0.4922.$$

2.3:4. Sea  $G_i$  el evento de que el informe  $i$  muestre una ganancia mayor que 5 %. Revisar más de dos informes significa que  $G_1^c \cap G_2^c$  ocurre. Dado que no hubo éxito en el primero y los trimestres son independientes,

$$\mathbb{P}(G_1^c \cap G_2^c | G_1^c) = \mathbb{P}(G_2^c | G_1^c) = \mathbb{P}(G_2^c) = 1 - p.$$

2.3:5. Sea  $K$  el número de pelotas nuevas elegidas el primer día. Entonces

$$\mathbb{P}(K = k) = \frac{\binom{9}{k} \binom{6}{3-k}}{\binom{15}{3}}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Después del primer juego quedan  $9 - k$  pelotas que nunca han sido usadas. Si  $A$  es el evento de que las tres elegidas el segundo día sean nuevas,

$$\mathbb{P}(A | K = k) = \frac{\binom{9-k}{3}}{\binom{15}{3}}.$$

a) Por probabilidad total,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=0}^3 \frac{\binom{9}{k} \binom{6}{3-k}}{\binom{15}{3}} \frac{\binom{9-k}{3}}{\binom{15}{3}} = \frac{528}{5915} \approx 0.08926.$$

b) Que exactamente dos pelotas del primer día ya hubieran sido usadas equivale a  $K = 1$ . Por Bayes,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(K = 1 | A) &= \frac{\mathbb{P}(A | K = 1)\mathbb{P}(K = 1)}{\mathbb{P}(A)} \\ &= \frac{\binom{8}{3} \binom{9}{1} \binom{6}{2}}{\binom{15}{3} \binom{15}{3}} \left( \frac{528}{5915} \right)^{-1} = \frac{9}{22} \approx 0.4091. \end{aligned}$$

2.3:6. Sea  $E$  el evento de tener la enfermedad y  $+$  el de obtener un resultado positivo. Los datos son

$$\mathbb{P}(E) = 0.015, \quad \mathbb{P}(+ | E) = 0.95, \quad \mathbb{P}(+ | E^c) = 1 - 0.98 = 0.02.$$

Por Bayes,

$$\mathbb{P}(E | +) = \frac{(0.95)(0.015)}{(0.95)(0.015) + (0.02)(0.985)} = \frac{285}{679} \approx 0.4197.$$

2.3:7. Sea  $A$  el evento de que una persona sea apta y  $C$  el de que sea contratada. Si  $x = \mathbb{P}(A)$ , entonces

$$\mathbb{P}(C | A) = 0.92, \quad \mathbb{P}(C | A^c) = 0.12, \quad \mathbb{P}(A | C) = 0.85.$$

Por Bayes y probabilidad total,

$$0.85 = \frac{0.92x}{0.92x + 0.12(1 - x)}.$$

Al resolver,  $0.102 = 0.24x$ , por lo que

$$\mathbb{P}(A) = x = 0.425.$$

Por tanto, el 42.5 % de las personas aspirantes es apto.

2.3:8. Sea  $D_i$  el evento de que exactamente  $i$  motores estén descompuestos y  $F$  el de que la máquina funcione. Entonces  $D_0, D_1, D_2, D_3$  forman una partición y

$$\mathbb{P}(F) = 1(0.562) + 0.7(0.403) + 0.49(0.032) + 0(0.003) = 0.85978.$$

Por Bayes,

$$\mathbb{P}(D_0 | F) = \frac{\mathbb{P}(F | D_0)\mathbb{P}(D_0)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0.562}{0.85978} \approx 0.6537.$$

2.3:9. Sean  $L_i$  y  $C_i$  los eventos de que la persona  $i$  disfrute de ocio o consuma, respectivamente. Se tiene

$$\mathbb{P}(L_1) = 0.65, \quad \mathbb{P}(L_2 | L_1) = 0.45, \quad \mathbb{P}(L_2 | C_1) = 0.35.$$

Así,

$$\mathbb{P}(L_2) = (0.45)(0.65) + (0.35)(0.35) = 0.415,$$

y  $\mathbb{P}(C_2) = 0.585$ .

a)

$$\mathbb{P}(L_1 | L_2) = \frac{(0.45)(0.65)}{0.415} = \frac{117}{166} \approx 0.7048.$$

b) Como  $\mathbb{P}(C_2 | C_1) = 1 - 0.35 = 0.65$ ,

$$\mathbb{P}(C_1 | C_2) = \frac{(0.65)(0.35)}{0.585} = \frac{7}{18} \approx 0.3889.$$

2.3:10. Sea  $D_i$  el evento de que el ratón gire a la derecha en el intento  $i$  e  $I_i = D_i^c$ . Las probabilidades de transición son

$$\mathbb{P}(D_{i+1} | D_i) = p_1, \quad \mathbb{P}(D_{i+1} | I_i) = p_2.$$

- a) El árbol comienza con  $\mathbb{P}(D_1) = \mathbb{P}(I_1) = 1/2$ . Desde cualquier rama que termine en  $D_i$  salen  $D_{i+1}$  con probabilidad  $p_1$  e  $I_{i+1}$  con probabilidad  $1 - p_1$ ; desde una rama que termine en  $I_i$  salen  $D_{i+1}$  con probabilidad  $p_2$  e  $I_{i+1}$  con probabilidad  $1 - p_2$ . Esto determina las ocho trayectorias de tres intentos.
- b) Sumando las cuatro trayectorias que terminan en  $D_3$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D_3) &= \frac{1}{2}[p_1^2 + (1 - p_1)p_2 + p_2p_1 + (1 - p_2)p_2] \\ &= \frac{p_1^2 - p_2^2}{2} + p_2.\end{aligned}$$

- c) Condicionado a  $D_1$ , las rutas hacia  $D_3$  son  $D_1D_2D_3$  y  $D_1I_2D_3$ . Por tanto,

$$\mathbb{P}(D_3 \mid D_1) = p_1^2 + (1 - p_1)p_2.$$

2.3:11. Sea  $B_k = \{N = k\}$ , de modo que  $\mathbb{P}(B_k) = 1/4$  para  $k = 1, 2, 3, 4$ . Condicionado a  $B_k$ , el número de pelotas verdes tiene distribución hipergeométrica.

- a)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{exactamente una verde}) &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \frac{\binom{3}{1} \binom{3}{k-1}}{\binom{6}{k}} \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{5} + \frac{9}{20} + \frac{1}{5} \right) = \frac{7}{16}.\end{aligned}$$

- b) Usando el complemento,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{al menos una verde}) &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 \left( 1 - \frac{\binom{3}{k}}{\binom{6}{k}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{4}{5} + \frac{19}{20} + 1 \right) = \frac{13}{16}.\end{aligned}$$

2.3:12. Sea  $K$  el número de focos buenos entre los cuatro transferidos y  $B = \{K \geq 2\}$ . Para  $k = 2, 3, 4$ ,

$$\mathbb{P}(K = k) = \frac{\binom{6}{k} \binom{4}{4-k}}{\binom{10}{4}}.$$

Se obtiene

$$\mathbb{P}(B) = \frac{90 + 80 + 15}{210} = \frac{37}{42}.$$

Si  $A$  es el evento de elegir dos focos buenos de la segunda caja, entonces

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cap B) &= \sum_{k=2}^4 \mathbb{P}(A \mid K = k) \mathbb{P}(K = k) \\ &= \frac{1}{6} \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \frac{8}{21} + 1 \frac{1}{14} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{1/3}{37/42} = \frac{14}{37}.$$

2.3:13. Sean  $C_1, C_2, C_3$  los eventos de elegir las cajas con dos monedas de oro, una de cada metal y dos de plata, respectivamente, y sea  $O$  el evento de obtener oro.

- a) Aunque  $C_1$  y  $C_2$  son las dos cajas compatibles con  $O$ , no tienen la misma verosimilitud:  $\mathbb{P}(O \mid C_1) = 1$ , mientras que  $\mathbb{P}(O \mid C_2) = 1/2$ . Observar oro favorece más a  $C_1$ .
- b) Por Bayes,

$$\mathbb{P}(C_1 \mid O) = \frac{1(1/3)}{1(1/3) + (1/2)(1/3) + 0(1/3)} = \frac{2}{3}.$$

2.3:14. Sea  $H$  el evento de elegir la moneda equilibrada y  $A_i$  el de obtener águila en el lanzamiento  $i$ .

a)

$$\mathbb{P}(H \mid A_1) = \frac{(1/2)(1/2)}{(1/2)(1/2) + 1(1/2)} = \frac{1}{3}.$$

b) Condicionado al tipo de moneda, los dos lanzamientos de la moneda equilibrada son independientes. Por tanto,

$$\mathbb{P}(H \mid A_1 \cap A_2) = \frac{(1/2)^2(1/2)}{(1/2)^2(1/2) + 1(1/2)} = \frac{1}{5}.$$

2.3:15. Sea  $p = 5/36$  la probabilidad de que Buzz obtenga suma 6 y  $q = 6/36 = 1/6$  la probabilidad de que Woody obtenga suma 7. Una ronda completa sin ganador tiene probabilidad

$$r = (1 - p)(1 - q) = \frac{31}{36} \frac{5}{6}.$$

Buzz gana en la primera ronda con probabilidad  $p$ , en la segunda con  $rp$ , y así sucesivamente. Entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\text{Buzz gana}) &= p \sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{p}{1 - r} \\ &= \frac{5/36}{1 - (31/36)(5/6)} = \frac{30}{61} \approx 0.4918. \end{aligned}$$

### 3. Autoevaluación. Fundamentos de probabilidad

#### 3.3. Planteamiento y modelación

3.3:1. Sea  $L$  el evento “el autobús llega tarde” y sea  $T$  el evento “hay tráfico”. Por la fórmula de probabilidad total,

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \mid L)\mathbb{P}(L) + \mathbb{P}(T \mid L^c)\mathbb{P}(L^c) = 0.7(0.6) + 0.1(0.4) = 0.46.$$

Por la fórmula de Bayes,

$$\mathbb{P}(L \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid L)\mathbb{P}(L)}{\mathbb{P}(T)} = \frac{0.7(0.6)}{0.46} = \frac{21}{23} \approx 0.9130.$$

3.3:2. En cada uno de los cinco días, la persona se encuentra a Farah con probabilidad  $p$ , de manera independiente.

a) Para que se encuentren exactamente dos días, se eligen esos dos días entre los cinco. Por tanto,

$$\mathbb{P}(\text{se encuentran dos días}) = \binom{5}{2} p^2 (1 - p)^3 = 10p^2(1 - p)^3.$$

- b) Para que la persona vea a Farah por segunda vez el viernes, debe encontrarla exactamente una vez entre lunes y jueves y volver a encontrarla el viernes. En consecuencia,

$$\mathbb{P}(\text{segundo encuentro el viernes}) = \binom{4}{1} p(1-p)^3 p = 4p^2(1-p)^3.$$

- 3.3:3. Sea  $N$  el evento “la persona no compra nada”,  $G$  el evento “compra un colmillo gris” y  $C$  el evento “compra un colmillo café”. Como  $\mathbb{P}(N) = 0.1$ , se tiene

$$\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(C) = 0.9.$$

Además,  $\mathbb{P}(G) = 2\mathbb{P}(C)$ . Si  $\mathbb{P}(C) = q$ , entonces  $3q = 0.9$  y, por tanto,

$$\mathbb{P}(C) = 0.3, \mathbb{P}(G) = 0.6.$$

Sea  $Z$  el evento “la persona adquiere una taza”. Cuando se compra un colmillo gris,  $\mathbb{P}(Z | G) = 0.8$ . Cuando se compra un colmillo café, el 40 % adquiere una bolsa y, por ello,

$$\mathbb{P}(Z | C) = 1 - 0.4 = 0.6.$$

Por la fórmula de probabilidad total,

$$\mathbb{P}(Z) = \mathbb{P}(Z | G)\mathbb{P}(G) + \mathbb{P}(Z | C)\mathbb{P}(C) = 0.8(0.6) + 0.6(0.3) = 0.66.$$

- 3.3:4. a) Se seleccionan 10 vacantes entre las 15. Para que exactamente dos correspondan a finanzas, deben elegirse dos de las seis vacantes de esa área y ocho de las nueve vacantes restantes. Como todas las selecciones de diez vacantes son igualmente probables,

$$\mathbb{P}(\text{exactamente dos en finanzas}) = \frac{\binom{6}{2}\binom{9}{8}}{\binom{15}{10}} = \frac{135}{3003} = \frac{45}{1001} \approx 0.0450.$$

- b) De las diez personas contratadas, cuatro pertenecen a finanzas, tres a análisis de datos y, por tanto, tres a administración. El complemento del evento solicitado es que las dos personas seleccionadas pertenezcan a las otras áreas. Así,

$$\mathbb{P}(\text{al menos una de administración}) = 1 - \frac{\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = 1 - \frac{21}{45} = \frac{8}{15}.$$

- 3.3:5. El resultado  $(i, j)$  indica que la primera persona asigna la calificación  $i$  y la segunda asigna la calificación  $j$ . Por tanto,

$$\begin{aligned} \Omega = \{ & (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), \\ & (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), \\ & (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), \\ & (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), \\ & (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5) \}. \end{aligned}$$

Como cada persona puede asignar cualquiera de las cinco calificaciones,  $|\Omega| = 5^2 = 25$ .

- a) El espacio muestral es el conjunto anterior y su cardinalidad es 25.

b) Los eventos son

$$A = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$$

y

$$B = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}.$$

Además,

$$A \cap B = \{(3, 3)\}.$$

Como los 25 resultados elementales son igualmente probables,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}, \mathbb{P}(B) = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

y

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{25} = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Por tanto,  $A$  y  $B$  son independientes.

c) Se tiene  $|B^c| = 25 - 5 = 20$ . Además,

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 5 + 5 - 1 = 9,$$

de modo que

$$|A^c \cap B^c| = 25 - |A \cup B| = 16.$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}(A^c | B^c) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap B^c)}{\mathbb{P}(B^c)} = \frac{16/25}{20/25} = \frac{4}{5}.$$

## 4. Funciones de masa, densidad y distribución

### 4.1. Comprensión teórica

4.1.1. La función de masa  $p_X(x) = \mathbb{P}(X = x)$  asigna una probabilidad a cada valor posible de una variable aleatoria discreta. Debe satisfacer  $p_X(x) \geq 0$  para todo  $x$  y

$$\sum_x p_X(x) = 1.$$

4.1.2. La función de densidad permite calcular probabilidades mediante integrales:

$$\mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x) dx.$$

Debe cumplir  $f_X(x) \geq 0$  y  $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1$ .

4.1.3. Para una variable aleatoria continua,

$$\mathbb{P}(X = x) = \int_x^x f_X(u) du = 0.$$

Por ello,  $f_X(x)$  describe densidad de probabilidad alrededor de  $x$ , no la probabilidad del punto  $x$ .

4.1:4. La función de distribución es

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La definición depende solo de probabilidades de eventos y, por tanto, se aplica a variables discretas, continuas y mixtas.

4.1:5. Toda función de distribución es no decreciente, continua por la derecha y satisface

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1.$$

El tamaño del salto en  $x$  es

$$F_X(x) - F_X(x^-) = \mathbb{P}(X = x).$$

4.1:6. a) Si  $X$  es discreta,

$$F_X(x) = \sum_{u \leq x} p_X(u).$$

b) Si  $X$  tiene densidad,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du.$$

4.1:7. Para una variable discreta,

$$p_X(x) = F_X(x) - F_X(x^-).$$

Si  $F_X$  es derivable en  $x$ , una densidad se recupera mediante  $f_X(x) = F'_X(x)$ , salvo posiblemente en un conjunto de medida cero.

4.1:8. Sí. Una densidad puede ser mayor que uno, pues su valor no es una probabilidad. Lo que siempre pertenece a  $[0, 1]$  es la integral sobre cualquier conjunto:

$$0 \leq \int_A f_X(x) dx = \mathbb{P}(X \in A) \leq 1.$$

4.1:9. Como  $f_1, f_2 \geq 0$  y  $\theta_1, \theta_2 > 0$ , se tiene  $f \geq 0$ . Además,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \theta_1 \int f_1(x) dx + \theta_2 \int f_2(x) dx = \theta_1 + \theta_2 = 1.$$

Por tanto,  $f$  es una función de densidad.

4.1:10. La función tiene límites 0 y 1 en los extremos, pero no es no decreciente ni continua por la derecha en  $x = 1$ :

$$F_X(1^-) = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = F_X(1).$$

En consecuencia, no es una función de distribución.

## 4.2. Cálculo y operaciones numéricas

4.2.1. a) Por simetría,

$$1 = 2k \int_0^1 x(1-x^2) dx = 2k \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{k}{2},$$

de donde  $k = 2$ .

b) Al integrar por intervalos,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{x^4}{2} - x^2 + \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ -\frac{x^4}{2} + x^2 + \frac{1}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

c) Por continuidad,

$$\mathbb{P}\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) = F_X\left(\frac{1}{2}\right) - F_X\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{16}.$$

4.2.2. a)

$$\mathbb{P}(1.5 < X \leq 3) = F_X(3) - F_X(1.5) = \frac{9}{16} - \frac{3}{16} = \frac{3}{8},$$

y, como no hay masa puntual en 3.75,

$$\mathbb{P}(X \geq 3.75) = 1 - F_X(3.75) = 1 - \frac{225}{256} = \frac{31}{256}.$$

b) Derivando en cada intervalo,

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}, & 0 < x < 2, \\ \frac{x}{8}, & 2 < x < 4, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Los valores en los extremos pueden elegirse arbitrariamente.

4.2.3. Para  $x < 1$ ,  $F_X(x) = 0$ . Si  $x \geq 1$ , sea  $m = \lfloor x \rfloor$ ; entonces

$$F_X(x) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{2^j} = 1 - \frac{1}{2^m}.$$

La gráfica es escalonada, con un salto de tamaño  $2^{-m}$  en cada entero positivo  $m$ .

4.2.4. Si  $x < 0$ ,

$$F_X(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^x e^u du = \frac{1}{2} e^x.$$

Si  $x \geq 0$ ,

$$F_X(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^x e^{-u} du = 1 - \frac{1}{2} e^{-x}.$$

Así,

$$F_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^x, & x < 0, \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

4.2:5. Mediante el cambio  $u = y/2$ ,

$$\int_0^\infty y^3 e^{-y/2} dy = 2^4 \Gamma(4) = 16(3!) = 96.$$

Por tanto,  $k = 1/96$ . La densidad parte de cero, alcanza su máximo cuando  $3/y - 1/2 = 0$ , es decir, en  $y = 6$ , y después decrece a cero.

4.2:6. a) La función es no negativa y

$$\int_0^\infty \frac{20000}{(100+x)^3} dx = 20000 \left[ -\frac{1}{2(100+x)^2} \right]_0^\infty = 1.$$

b) Para  $t > 0$ ,

$$\mathbb{P}(X > t) = \int_t^\infty \frac{20000}{(100+x)^3} dx = \frac{10000}{(100+t)^2}.$$

4.2:7. La función es continua en 0, 1 y 4, no decreciente en cada intervalo y tiene límites 0 y 1 en los extremos. Por tanto, es una función de distribución. Su gráfica consta de un tramo horizontal en 0, una recta de (0, 0) a (1, 1/2), la curva  $\sqrt{x}/2$  de (1, 1/2) a (4, 1) y un tramo horizontal en 1.

### 4.3. Planteamiento y modelación

4.3:1. Sea  $X$  el número de lanzamientos hasta la primera repetición. Su soporte es  $\{2, 3, \dots, 7\}$ . Para  $k$  en este conjunto, los primeros  $k-1$  resultados deben ser distintos y el resultado  $k$  debe coincidir con uno de ellos. Por tanto,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{6 \cdot 5 \cdots (6-k+2)}{6^{k-1}} \frac{k-1}{6}.$$

En particular, para  $k = 2, \dots, 7$  las probabilidades son

$$\frac{1}{6}, \frac{5}{18}, \frac{5}{18}, \frac{5}{27}, \frac{25}{324}, \frac{5}{324}.$$

4.3:2. Las posiciones de los dos componentes defectuosos forman uno de los  $\binom{4}{2} = 6$  pares igualmente probables. El evento  $Y = y$  exige que una posición defectuosa sea  $y$  y la otra esté entre 1 y  $y-1$ . Así,

$$\mathbb{P}(Y = y) = \frac{y-1}{\binom{4}{2}}, \quad y = 2, 3, 4.$$

Por tanto, las probabilidades respectivas son 1/6, 1/3 y 1/2.

4.3:3. Hay  $\binom{r}{n}$  muestras igualmente probables.

a) Para que  $Y \leq y$ , las  $n$  bolas deben elegirse de  $\{1, \dots, y\}$ :

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{\binom{\lfloor y \rfloor}{n}}{\binom{r}{n}},$$

con valor 0 si  $y < n$  y valor 1 si  $y \geq r$ .

b) Para que  $Z \geq z$ , las bolas deben elegirse de  $\{\lceil z \rceil, \dots, r\}$ :

$$\mathbb{P}(Z \geq z) = \frac{\binom{r - \lceil z \rceil + 1}{n}}{\binom{r}{n}},$$

con las convenciones naturales en los extremos.

4.3:4. Existen  $3^3 = 27$  asignaciones equiprobables. Si  $Y = 0$ , cada tazón recibe una bola: hay  $3! = 6$  asignaciones. Si  $Y = 2$ , todas las bolas caen en el mismo tazón: hay 3. Las 18 restantes corresponden a  $Y = 1$ . Así,

$$\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{2}{9}, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{9}.$$

4.3:5. Si la célula inicial muere, la tercera generación contiene cero células. Si se divide, las dos células de la segunda generación evolucionan independientemente. Por tanto,

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.1 + 0.9(0.1)^2 = 0.109,$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = 0.9 \binom{2}{1} (0.9)(0.1) = 0.162, \quad \mathbb{P}(X = 4) = 0.9(0.9)^2 = 0.729.$$

4.3:6. El experimento termina entre los lanzamientos 3 y 5. Termina en 3 si los tres resultados son iguales, por lo que  $\mathbb{P}(X = 3) = 2/2^3 = 1/4$ . Termina en 4 si en los primeros tres lanzamientos un resultado aparece dos veces y vuelve a aparecer en el cuarto: hay  $2 \binom{3}{1} = 6$  secuencias, así que  $\mathbb{P}(X = 4) = 6/2^4 = 3/8$ . El resto termina en 5:

$$\mathbb{P}(X = 5) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \frac{3}{8}.$$

4.3:7. a) Sin reemplazo,  $X$  es hipergeométrica:

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{6}{x} \binom{4}{n-x}}{\binom{10}{n}}, \quad \max(0, n-4) \leq x \leq n.$$

b) Con reemplazo, cada selección es roja con probabilidad  $6/10 = 3/5$ . Por tanto,

$$\mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} \left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n.$$

4.3:8. a) Con reemplazo,

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \leq x-1) = \left(\frac{x}{12}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{12}\right)^2 = \frac{2x-1}{144},$$

para  $x = 1, 2, \dots, 12$ . Alternativamente, las dos extracciones se consideran ordenadas. Por tanto, el espacio muestral es

$$\Omega = \{(i, j) : i, j \in \{1, \dots, 12\}\}$$

y contiene  $12^2 = 144$  resultados equiprobables.

Fijemos  $x \in \{1, \dots, 12\}$ . Para que  $X = x$ , ambos números seleccionados deben ser menores o iguales que  $x$  y al menos uno de ellos debe ser exactamente  $x$ . Los resultados favorables son

$$(x, 1), (x, 2), \dots, (x, x)$$

y

$$(1, x), (2, x), \dots, (x-1, x).$$

La primera lista contiene  $x$  resultados y la segunda  $x-1$ . El resultado  $(x, x)$  aparece solamente en la primera lista para no contarlos dos veces. Por tanto, el número de resultados favorables es

$$x + (x-1) = 2x - 1.$$

- b) Sin reemplazo, si el máximo es  $x$ , la otra bola puede tener cualquiera de los valores  $1, \dots, x-1$ . Así,

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{x-1}{\binom{12}{2}} = \frac{x-1}{66}, \quad x = 2, 3, \dots, 12.$$

## 5. Variables aleatorias discretas y continuas importantes

### 5.1. Comprensión teórica

- 5.1.1. Una variable aleatoria discreta toma valores en un conjunto finito o numerable y se describe mediante una función de masa. Por ejemplo, el número de águilas en tres lanzamientos toma valores en  $\{0, 1, 2, 3\}$ . Una variable aleatoria continua puede tomar valores en un conjunto no numerable y se describe mediante una densidad; por ejemplo, el tiempo de espera de una persona puede tomar cualquier valor no negativo. En el caso continuo, cada valor individual tiene probabilidad cero.
- 5.1.2.
  - $X \sim \text{Bin}(n, p)$  cuenta éxitos en  $n$  ensayos Bernoulli independientes, cada uno con probabilidad de éxito  $p$ ;  $X \in \{0, \dots, n\}$ .
  - $X \sim \text{Geom}(p)$  cuenta ensayos hasta el primer éxito;  $X \in \{1, 2, \dots\}$ .
  - $X \sim \text{NegBin}(r, p)$  cuenta ensayos hasta el éxito número  $r$ ;  $X \in \{r, r+1, \dots\}$ .
  - $X \sim \text{Hipergeom}(N, K, n)$  cuenta éxitos al extraer  $n$  elementos sin reemplazo de una población de tamaño  $N$  con  $K$  éxitos. Su soporte es  $\{\max(0, n-N+K), \dots, \min(n, K)\}$ .
  - $X \sim \text{Pois}(\lambda)$  cuenta ocurrencias en una región fija cuando ocurren independientemente y a una tasa constante;  $X \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .
- 5.1.3. En ambos modelos se cuentan éxitos en una muestra de tamaño fijo. En la binomial, los ensayos son independientes y la probabilidad de éxito permanece constante, como ocurre al muestrear con reemplazo. En la hipergeométrica se muestrea sin reemplazo de una población finita; por ello, los ensayos son dependientes y la probabilidad de éxito cambia después de cada extracción.
- 5.1.4. En la binomial permanece fijo el número  $n$  de ensayos y se cuenta el número de éxitos. En la geométrica permanece fijo el número de éxitos buscado, uno, y se cuenta cuántos ensayos se requieren para obtenerlo.
- 5.1.5. El modelo Poisson es razonable para contar ocurrencias independientes en una región cuando la tasa media es aproximadamente constante y dos o más ocurrencias en una región muy pequeña son poco probables. Si la tasa es  $\lambda$  por unidad y la región tiene tamaño  $t$ , el parámetro es  $\lambda t$ ; por tanto, al multiplicar el tamaño de la región por una constante, el parámetro se multiplica por la misma constante.

5.1:6. Una uniforme discreta modela, por ejemplo, el resultado de un dado equilibrado: todos los valores de  $\{1, \dots, 6\}$  tienen la misma probabilidad. Una uniforme continua modela, por ejemplo, un punto elegido al azar en  $[0, 1]$ : intervalos de igual longitud tienen igual probabilidad. En el segundo caso no son los puntos individuales, cuya probabilidad es cero, los que tienen una probabilidad positiva común.

5.1:7. Si  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , entonces, para  $s, t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X > s + t \mid X > s) = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(X > t).$$

Así, después de esperar  $s$  unidades sin que ocurra el evento, el tiempo adicional de espera tiene la misma distribución que el tiempo de espera original.

5.1:8. Si  $N(t) \sim \text{Pois}(\lambda t)$  cuenta las llegadas hasta  $t$  y  $T$  es el tiempo de la primera llegada, entonces

$$\{T > t\} = \{N(t) = 0\}.$$

Por consiguiente,  $\mathbb{P}(T > t) = e^{-\lambda t}$  y  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

5.1:9. Si  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , se estandariza mediante  $Z = (X - \mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ . Por ejemplo,

$$\mathbb{P}(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right),$$

donde  $\Phi$  es la función de distribución de la normal estándar.

## 5.2. Cálculo y operaciones numéricas

5.2:1. Para  $X \sim \text{Bin}(10, 0.6)$ ,

$$\mathbb{P}(X = 6) = \binom{10}{6} (0.6)^6 (0.4)^4 \approx 0.250823,$$

$$\mathbb{P}(X \geq 6) = \sum_{k=6}^{10} \binom{10}{k} (0.6)^k (0.4)^{10-k} \approx 0.633103,$$

$$\mathbb{P}(3 < X \leq 8) = \sum_{k=4}^8 \binom{10}{k} (0.6)^k (0.4)^{10-k} \approx 0.898881.$$

5.2:2. Como  $\{X > 1\} \subseteq \{X \geq 1\}$ ,

$$\mathbb{P}(X > 1 \mid X \geq 1) = \frac{1 - \mathbb{P}(X = 0) - \mathbb{P}(X = 1)}{1 - \mathbb{P}(X = 0)} = \frac{1 - (1 - p)^n - np(1 - p)^{n-1}}{1 - (1 - p)^n}.$$

5.2:3. Para la convención indicada,  $\mathbb{P}(X = k) = (0.9)^{k-1}(0.1)$ . Entonces

$$\mathbb{P}(X = 5) = 0.9^4(0.1) = 0.06561, \quad \mathbb{P}(X \geq 5) = 0.9^4 = 0.6561.$$

Por falta de memoria,

$$\mathbb{P}(X > 8 \mid X > 3) = \mathbb{P}(X > 5) = 0.9^5 = 0.59049.$$

5.2:4. Para necesitar siete ensayos, el cuarto éxito debe ocurrir en el séptimo:

$$\mathbb{P}(X = 7) = \binom{6}{3} (0.3)^4 (0.7)^3 = 0.055566.$$

Además,

$$\mathbb{P}(X > 7) = \mathbb{P}(\text{Bin}(7, 0.3) \leq 3) = \sum_{k=0}^3 \binom{7}{k} (0.3)^k (0.7)^{7-k} = 0.873964.$$

5.2:5. Si  $X \sim \text{Pois}(5)$ ,

$$\mathbb{P}(X \leq 4) = e^{-5} \sum_{k=0}^4 \frac{5^k}{k!} \approx 0.440493,$$

$$\mathbb{P}(X \geq 12) = 1 - e^{-5} \sum_{k=0}^{11} \frac{5^k}{k!} \approx 0.005453,$$

$$\mathbb{P}(4 \leq X \leq 7) = e^{-5} \sum_{k=4}^7 \frac{5^k}{k!} \approx 0.601602.$$

5.2:6. La función de masa es

$$\mathbb{P}(X = x) = \frac{\binom{10}{x} \binom{20}{6-x}}{\binom{30}{6}}.$$

Por tanto,

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{\binom{20}{6}}{\binom{30}{6}} \approx 0.065277,$$

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \frac{\binom{20}{6}}{\binom{30}{6}} \approx 0.934723,$$

$$\mathbb{P}(X \leq 2) = \sum_{x=0}^2 \frac{\binom{10}{x} \binom{20}{6-x}}{\binom{30}{6}} \approx 0.693571.$$

5.2:7. Como  $X \in \{1, \dots, 10\}$ ,

$$\mathbb{P}(X^2 \geq 9) = \mathbb{P}(X \geq 3) = \frac{8}{10} = 0.8.$$

Asimismo,  $\lfloor X/2 \rfloor = 3$  si  $X \in \{6, 7\}$ , de modo que la probabilidad es  $2/10 = 0.2$ .

5.2:8. Para  $X \sim \text{Unif}(1, 5)$ , las probabilidades son cocientes de longitudes:

$$\mathbb{P}(X > 2) = \frac{3}{4}, \quad \mathbb{P}(X > 2 \mid X > 1.5) = \frac{3}{3.5} = \frac{6}{7}, \quad \mathbb{P}(2 \leq X \leq 4) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

5.2:9. Para  $X \sim \text{Exp}(1/3)$ ,  $F(x) = 1 - e^{-x/3}$ ,  $x \geq 0$ . Así,

$$\mathbb{P}(X \leq 1) = 1 - e^{-1/3} \approx 0.283469,$$

$$\mathbb{P}(1 < X \leq 3) = e^{-1/3} - e^{-1} \approx 0.348652,$$

$$\mathbb{P}(X > 4 \mid X > 2) = \mathbb{P}(X > 2) = e^{-2/3} \approx 0.513417.$$

5.2:10. Si  $X \sim \text{Gamma}(3, 2)$  con tasa 2, su densidad es  $f(x) = 4x^2 e^{-2x}$  para  $x > 0$  y

$$F(x) = 1 - e^{-2x}(1 + 2x + 2x^2).$$

Por ello,

$$\mathbb{P}(X \leq 1) \approx 0.323324, \quad \mathbb{P}(1 < X \leq 2) \approx 0.438573, \quad \mathbb{P}(X > 2) \approx 0.238103.$$

5.2:11. Si  $\Phi$  denota la función de distribución normal estándar,

$$\mathbb{P}(-1.5 < Z < 1.5) = \Phi(1.5) - \Phi(-1.5) \approx 0.866386,$$

$$\mathbb{P}(Z > 1.96) = 1 - \Phi(1.96) \approx 0.024998.$$

Finalmente,  $c = \Phi^{-1}(0.8531) \approx 1.04982$ .

5.2:12. Al estandarizar  $Z = (X - 950)/10$ ,

$$\mathbb{P}(947 < X < 958) = \Phi(0.8) - \Phi(-0.3) \approx 0.406056.$$

La ecuación  $\mathbb{P}(X < c) = 0.8531$  da

$$c = 950 + 10\Phi^{-1}(0.8531) \approx 960.498.$$

### 5.3. Planteamiento y modelación

5.3:1. Sea  $X$  el número de clientes que desean comprar. Entonces  $X \sim \text{Bin}(5, 0.4)$  y hay productos suficientes si  $X \leq 3$ :

$$\mathbb{P}(X \leq 3) = \sum_{k=0}^3 \binom{5}{k} (0.4)^k (0.6)^{5-k} = 0.91296.$$

5.3:2. Sea  $X$  el número de asistentes que comparten la opinión. Entonces  $X \sim \text{Bin}(25, 0.8)$  y

$$\mathbb{P}(X = 22) = \binom{25}{22} (0.8)^{22} (0.2)^3 \approx 0.135768.$$

5.3:3. Sea  $X$  el número de inversiones exitosas. Entonces  $X \sim \text{Bin}(30, 0.25)$  y

$$\mathbb{P}(X \geq 18) = \sum_{k=18}^{30} \binom{30}{k} (0.25)^k (0.75)^{30-k} \approx 0.00005008.$$

5.3:4. Considera éxito encontrar a un dentista que no recomienda la pasta, cuya probabilidad es 0.1. Si  $X$  es el número de entrevistas hasta el primer éxito,  $X \sim \text{Geom}(0.1)$ . Por tanto,

$$\mathbb{P}(X = 5) = 0.9^4(0.1) = 0.06561, \quad \mathbb{P}(X \geq 5) = 0.9^4 = 0.6561.$$

5.3:5. Sea  $X_A$  el número de personas en una región de área  $A$ . La intensidad es 2 personas por metro cuadrado, por lo que  $X_A \sim \text{Pois}(2A)$ . Así,

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = e^{-4} \approx 0.018316$$

y

$$\mathbb{P}(X_4 \geq 3) = 1 - e^{-8} \left( 1 + 8 + \frac{8^2}{2} \right) \approx 0.986246.$$

5.3:6. Si  $X_t$  cuenta las llegadas durante  $t$  horas, entonces  $X_t \sim \text{Pois}(5t)$ . En consecuencia,

$$\mathbb{P}(X_{1/2} \leq 4) = e^{-2.5} \sum_{k=0}^4 \frac{2.5^k}{k!} \approx 0.891178$$

y

$$\mathbb{P}(X_1 \geq 12) = 1 - e^{-5} \sum_{k=0}^{11} \frac{5^k}{k!} \approx 0.005453.$$

5.3:7. Sea  $X$  el número de clientes seleccionados que invierten en bonos. Entonces  $X \sim \text{Hipergeom}(20, 8, 5)$ , con soporte  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ , y

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \frac{\binom{8}{k} \binom{12}{5-k}}{\binom{20}{5}}, & 0 \leq x < 5, \\ 1, & x \geq 5. \end{cases}$$

5.3:8. Sea  $X$  el número de préstamos de alto riesgo en la muestra. Entonces  $X \sim \text{Hipergeom}(30, 10, 6)$   
y

$$\mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \frac{\binom{20}{6}}{\binom{30}{6}} \approx 0.934723.$$

5.3:9. Sea  $L$  la distancia entre los hoteles y  $X$  la distancia del vendedor a  $A$ . Entonces  $X \sim \text{Unif}(0, L)$ . Está más cerca de  $A$  cuando  $X < L - X$ , es decir, cuando  $X < L/2$ , por lo que la probabilidad es  $1/2$ . Además,  $X \geq 3(L - X)$  equivale a  $X \geq 3L/4$ ; por tanto, la segunda probabilidad es  $1/4$ .

5.3:10. Como  $\{T > t\} = \{N(t) = 0\}$ ,

$$\mathbb{P}(T > t) = \mathbb{P}(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}.$$

Esta es la función de supervivencia de una distribución exponencial de tasa  $\lambda$ ; por ello,  $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ .

5.3:11. Sea  $X$  la longitud del tornillo. Entonces  $X \sim N(950, 10^2)$  y

$$\mathbb{P}(947 < X < 958) = \Phi(0.8) - \Phi(-0.3) \approx 0.406056.$$

5.3:12. Sea  $X \sim \text{Bin}(1000, 1/6)$ . Su aproximación normal tiene media  $1000/6$  y varianza  $1000(1/6)(5/6)$ . Con corrección por continuidad,

$$\mathbb{P}(150 \leq X \leq 200) \approx \Phi\left(\frac{200.5 - 1000/6}{\sqrt{1000(1/6)(5/6)}}\right) - \Phi\left(\frac{149.5 - 1000/6}{\sqrt{1000(1/6)(5/6)}}\right) \approx 0.925345.$$

5.3:13. Sea  $X \sim \text{Bin}(500, 0.75)$ . La aproximación normal tiene media  $375$  y varianza  $93.75$ . Con corrección por continuidad,

$$\mathbb{P}(360 \leq X \leq 400) \approx \Phi\left(\frac{400.5 - 375}{\sqrt{93.75}}\right) - \Phi\left(\frac{359.5 - 375}{\sqrt{93.75}}\right) \approx 0.941069.$$

- 5.3:14. a) El evento complementario es no obtener ningún 6 en cuatro lanzamientos. Por independencia,

$$\mathbb{P}(\text{al menos un 6}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296} \approx 0.517747.$$

- b) En un lanzamiento de dos dados, la probabilidad de no obtener doble seis es  $35/36$ . Por tanto,

$$\mathbb{P}(\text{al menos un doble seis}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0.491404.$$

La primera probabilidad es ligeramente mayor; los eventos no son igualmente probables.

## 6. Características numéricas de una variable aleatoria

### 6.1. Comprensión teórica

- 6.1:1. La esperanza es el promedio de largo plazo o centro de masa de la distribución. Es un promedio ponderado y, por ello, no tiene que pertenecer al soporte; por ejemplo, la esperanza de un dado equilibrado es 3.5.
- 6.1:2. Si  $X$  es discreta,  $\mathbb{E}(X) = \sum_x x\mathbb{P}(X = x)$ , siempre que  $\sum_x |x|\mathbb{P}(X = x) < \infty$ . Si es continua,  $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$ , siempre que  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$ .
- 6.1:3. LOTUS permite calcular una función de  $X$  sin obtener primero su distribución:

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x) \quad \text{o} \quad \mathbb{E}[g(X)] = \int g(x)f_X(x) dx.$$

- 6.1:4. Para constantes  $a, b$ ,  $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$ . Esto se sigue directamente de la linealidad de sumas e integrales, por lo que no se necesita la distribución de  $aX + b$ .
- 6.1:5. La varianza mide la dispersión cuadrática alrededor de la media:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

Es no negativa porque es la esperanza de una variable no negativa.

- 6.1:6. Como  $aX + b - \mathbb{E}(aX + b) = a(X - \mathbb{E}X)$ ,

$$\text{Var}(aX + b) = \mathbb{E}[a^2(X - \mathbb{E}X)^2] = a^2\text{Var}(X).$$

La constante  $b$  desplaza todos los valores por igual y no altera la dispersión.

- 6.1:7. a) Falsa. Una variable que vale  $-1$  y  $1$  con probabilidades iguales tiene esperanza cero.
- b) Verdadera.  $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = 0$  implica  $X = \mathbb{E}X$  con probabilidad uno.
- c) Falsa. Variables con distribuciones distintas pueden compartir la misma media.
- d) Falsa. Variables con distribuciones distintas pueden compartir la misma varianza.

- 6.1:8. Un cuantil de orden  $p$  es un valor  $q_p$  que deja al menos probabilidad  $p$  a su izquierda y al menos  $1 - p$  a su derecha. Puede no ser único cuando la función de distribución tiene tramos constantes. La mediana corresponde a  $p = 0.5$ ; los cuartiles, a 0.25, 0.5, 0.75; y los percentiles dividen la escala en cien partes.
- 6.1:9. Si  $X - a$  tiene una distribución simétrica respecto de cero y es integrable, entonces  $\mathbb{E}(X - a) = 0$  y  $\mathbb{E}(X) = a$ . El punto  $a$  es una mediana, aunque la mediana puede no ser única.
- 6.1:10. En una distribución asimétrica, valores extremos de una cola desplazan la media. La mediana depende del orden y es más resistente; la media es más sensible a valores extremos.
- 6.1:11. Si  $X \stackrel{d}{=} Y$ , sus medidas de distribución coinciden. Por LOTUS, integrar la misma función  $g$  respecto de esas medidas produce  $\mathbb{E}[g(X)] = \mathbb{E}[g(Y)]$ , cuando existen.
- 6.1:12. En general, una transformación no conmuta con la esperanza. Por ejemplo, si  $\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$  y  $g(x) = x^2$ , entonces  $g(\mathbb{E}X) = 0$  y  $\mathbb{E}[g(X)] = 1$ .

## 6.2. Cálculo y operaciones numéricas

6.2:1.

$$\mathbb{E}X = \sum_{x=1}^4 x \frac{x}{10} = 3, \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_{x=1}^4 x^2 \frac{x}{10} = 10.$$

Por tanto,  $\text{Var}(X) = 10 - 3^2 = 1$  y  $\sigma_X = 1$ .

6.2:2.

$$\mathbb{E}X = \int_0^1 2x^2 dx = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 2x^3 dx = \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1}{18}.$$

Como  $F(x) = x^2$  en  $(0, 1)$ ,  $F(m) = 1/2$  da  $m = 1/\sqrt{2}$ .

6.2:3. La densidad es  $f(x) = x/2$  en  $(0, 2)$ . Así,

$$\mathbb{E}X = \int_0^2 \frac{x^2}{2} dx = \frac{4}{3}, \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_0^2 \frac{x^3}{2} dx = 2, \quad \text{Var}(X) = \frac{2}{9}.$$

De  $F(q_p) = q_p^2/4 = p$  se obtiene  $q_p = 2\sqrt{p}$ ; por tanto,  $Q_1 = 1$ ,  $Q_2 = \sqrt{2}$  y  $Q_3 = \sqrt{3}$ .

6.2:4. Por simetría,  $\mathbb{E}X = 0$  y la mediana es 0. Además,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2,$$

por lo que  $\text{Var}(X) = 2$ .

6.2:5. Para  $X \sim \text{Bin}(10, 0.6)$ ,  $\mathbb{E}X = 6$  y  $\text{Var}(X) = 2.4$ . Luego  $\mathbb{E}(3X - 2) = 16$  y  $\text{Var}(3X - 2) = 9(2.4) = 21.6$ .

6.2:6. Para la geométrica indicada,  $\mathbb{E}X = 10$  y  $\text{Var}(X) = 90$ . Además,

$$\mathbb{P}(X \leq m) = 1 - 0.9^m \geq 0.75 \iff m \geq \frac{\log(0.25)}{\log(0.9)},$$

de modo que el menor entero es  $m = 14$ .

6.2:7.  $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = 5$ . Usando  $x(x-1)/x! = 1/(x-2)!$ ,

$$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{x=2}^{\infty} x(x-1)e^{-5} \frac{5^x}{x!} = 25.$$

6.2:8. Como  $\mathbb{E}X = 5.5$  y  $\text{Var}(X) = (10^2 - 1)/12 = 8.25$ ,

$$\mathbb{E}[(X-5)^2] = \text{Var}(X) + (\mathbb{E}X - 5)^2 = 8.25 + 0.25 = 8.5.$$

6.2:9. Para  $X \sim \text{Unif}(1, 5)$ ,  $\mathbb{E}X = 3$ ,  $\text{Var}(X) = 16/12 = 4/3$  y  $q_p = 1 + 4p$ . Por tanto, la mediana es 3 y los cuartiles son 2, 3, 4.

6.2:10.  $F(x) = 1 - e^{-x/3}$ . De  $F(q_p) = p$  resulta  $q_p = -3 \log(1-p)$ . Así, la mediana es  $3 \log 2$  y el percentil 90 es  $3 \log 10$ .

6.2:11. Con software,  $q_p = 950 + 10z_p$ . Como  $z_{0.025} \approx -1.959964$  y  $z_{0.975} \approx 1.959964$ , los cuantiles son aproximadamente 930.4004 y 969.5996.

6.2:12. De  $\mathbb{E}(X^2) = \text{Var}(X) + [\mathbb{E}X]^2 = 13$ ,

$$\mathbb{E}(2X^2 - 3X + 1) = 2(13) - 3(3) + 1 = 18, \quad \text{Var}(5 - 2X) = 4\text{Var}(X) = 16.$$

6.2:13.

$$\mathbb{E}X = \int_0^{\infty} \frac{20000x}{(100+x)^3} dx = 100.$$

En cambio, el integrando de  $\mathbb{E}(X^2)$  se comporta como  $20000/x$  cuando  $x \rightarrow \infty$ , por lo que

$$\int_0^{\infty} \frac{20000x^2}{(100+x)^3} dx = \infty.$$

La media existe, pero  $\mathbb{E}(X^2)$  y  $\text{Var}(X)$  no existen como cantidades finitas.

6.2:14. La normalización da  $c = \lambda$ , así que  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ . La condición  $\mathbb{P}(X \leq 4) = 1/2$  implica  $e^{-4\lambda} = 1/2$  y  $\lambda = \log 2/4$ . Por tanto,

$$\mathbb{P}(X > 5) = e^{-5\lambda} = 2^{-5/4}.$$

6.2:15. Por simetría,  $\mathbb{E}(X) = 0$ , y  $\text{Var}(X) = a^2/3$ . Chebyshev produce

$$\mathbb{P}(|X| < a) \geq 1 - \frac{a^2/3}{a^2} = \frac{2}{3}.$$

En realidad, por el soporte,  $\mathbb{P}(|X| \leq a) = 1$ ;  $2/3$  es la cota obtenida exclusivamente con Chebyshev.

6.2:16. Jensen da

- a)  $\mathbb{E}(X^3) \geq 25^3 = 15625$  porque  $x^3$  es convexa en  $[0, \infty)$ .
- b)  $\mathbb{E}(\sqrt{X}) \leq \sqrt{25} = 5$  porque  $\sqrt{x}$  es cóncava.
- c)  $\mathbb{E}(\log X) \leq \log 25$ , siempre que la esperanza esté definida, porque  $\log x$  es cóncava.
- d)  $\mathbb{E}(e^{-X}) \geq e^{-25}$  porque  $e^{-x}$  es convexa.

### 6.3. Planteamiento y modelación

6.3:1.  $X \sim \text{Bin}(5, 0.4)$ . Entonces  $\mathbb{E}(X) = 2$  productos y  $\text{Var}(X) = 1.2$  productos cuadrados.

6.3:2. Si las llegadas forman un proceso de Poisson,  $X \sim \text{Pois}(2.5)$  en media hora. Por ello,  $\mathbb{E}(X) = \text{Var}(X) = 2.5$ .

6.3:3.  $X \sim \text{Hipergeom}(N = 20, K = 8, n = 5)$ . Entonces

$$\mathbb{E}(X) = 5 \frac{8}{20} = 2, \quad \text{Var}(X) = 5 \frac{8}{20} \frac{12}{20} \frac{15}{19} = \frac{18}{19}.$$

6.3:4.  $X \sim \text{Exp}(1/6)$ . Por la fórmula  $q_p = -6 \log(1 - p)$ , la mediana es  $6 \log 2 \approx 4.159$  minutos y el percentil 90 es  $6 \log 10 \approx 13.816$  minutos.

6.3:5. Para  $X \sim N(950, 10^2)$ , el 95 % central es

$$950 \pm 1.959964(10),$$

es decir, aproximadamente  $[930.4004, 969.5996]$  mm.

6.3:6. Si  $G = 200$  con probabilidad 0.6 y  $G = -150$  con probabilidad 0.4, entonces

$$\mathbb{E}(G) = 60, \quad \mathbb{E}(G^2) = 33000, \quad \text{Var}(G) = 33000 - 60^2 = 29400.$$

Es favorable en promedio porque la ganancia esperada es positiva.

6.3:7. Si  $Y = 10000I$ , con  $I \sim \text{Bernoulli}(0.02)$ , entonces  $\mathbb{E}(Y) = 10000(0.02) = 200$ . La prima mínima que cubre solamente el pago promedio es 200 pesos.

6.3:8. El valor es  $V = 3X + 40$ . Por tanto,  $\mathbb{E}(V) = 400$  y  $\sigma_V = 3\sqrt{25} = 15$ .

6.3:9. Necesariamente  $T \in \{3, 4, 5\}$ . Se tiene  $\mathbb{P}(T = 3) = 1/4$ ,  $\mathbb{P}(T = 4) = 1/4$  y  $\mathbb{P}(T = 5) = 1/2$ . Por tanto,

$$\mathbb{E}(T) = \frac{17}{4}, \quad \mathbb{E}(T^2) = \frac{75}{4}, \quad \text{Var}(T) = \frac{11}{16}.$$

6.3:10. La célula inicial pertenece a la primera generación. Por tanto, para llegar a la tercera generación ocurren dos etapas reproductivas. De acuerdo con la función de masa obtenida anteriormente,

$$\mathbb{P}(X = 0) = 0.109, \quad \mathbb{P}(X = 2) = 0.162, \quad \mathbb{P}(X = 4) = 0.729.$$

Utilizando esta función de masa,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \sum_x x \mathbb{P}(X = x) \\ &= 0(0.109) + 2(0.162) + 4(0.729) \\ &= 3.24. \end{aligned}$$

Para calcular la varianza, primero obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \sum_x x^2 \mathbb{P}(X = x) \\ &= 0^2(0.109) + 2^2(0.162) + 4^2(0.729) \\ &= 12.312. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 12.312 - (3.24)^2 = 1.8144.$$

La igualdad  $\mathbb{E}(X) = 3.24$  significa que, si observáramos muchas colonias independientes que evolucionan bajo este modelo, el número promedio de células en la tercera generación sería aproximadamente 3.24. No significa que una colonia pueda tener 3.24 células: los únicos valores posibles son 0, 2 y 4.

La varianza  $\text{Var}(X) = 1.8144$ , expresada en células al cuadrado, mide la dispersión del número de células respecto de su media. La desviación estándar es

$$\sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{1.8144} \approx 1.347$$

células.

6.3:11. Sin memoria, si  $T$  es el tiempo restante,

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{3}(1 + \mathbb{E}T) + \frac{1}{3}(3 + \mathbb{E}T),$$

de donde  $\mathbb{E}T = 4$ . Para el segundo momento,

$$\mathbb{E}(T^2) = \frac{1}{3}[1 + 2\mathbb{E}T + \mathbb{E}(T^2)] + \frac{1}{3}[9 + 6\mathbb{E}T + \mathbb{E}(T^2)],$$

por lo que  $\mathbb{E}(T^2) = 42$ ,  $\text{Var}(T) = 26$  y  $\sigma_T = \sqrt{26}$ . Si recuerda y no vuelve a elegir una puerta ya explorada, las posibilidades producen tiempos 0, 1, 3, 4 con probabilidades  $1/3, 1/6, 1/6, 1/3$ . Entonces  $\mathbb{E}T = 2$ ,  $\text{Var}(T) = 3$  y  $\sigma_T = \sqrt{3}$ .

6.3:12. La probabilidad de obtener el mismo color es  $2\binom{5}{2}/\binom{10}{2} = 4/9$  y la de colores distintos es  $5/9$ . Para que el juego sea justo,

$$p\frac{4}{9} - 1\frac{5}{9} = 0,$$

así que  $p = 5/4$  pesos.

6.3:13. El reembolso es  $R = 12000$  si  $0 < X \leq 1$ ,  $R = 6000$  si  $1 < X \leq 2$  y  $R = 0$  si  $X > 2$ . Como  $X \sim \text{Exp}(1/2)$ ,

$$\mathbb{E}(R) = 12000(1 - e^{-1/2}) + 6000(e^{-1/2} - e^{-1}) \approx 6153.68.$$

6.3:14. La cita contiene 19 palabras. Sus longitudes son

$$3, 9, 3, 11, 2, 2, 4, 2, 5, 2, 3, 2, 2, 7, 3, 3, 9, 2, 12.$$

La longitud 2 aparece siete veces, por lo que la moda es 2; al ordenar los datos, el décimo valor es 3, por lo que la mediana es 3. Además,

$$\mathbb{E}(N) = \frac{86}{19} \approx 4.5263, \quad \sigma_N = \sqrt{\frac{3814}{361}} \approx 3.2504.$$

Los valores a distancia menor que dos de la media son 3, 4, 5; aparecen siete veces. Por tanto,

$$\mathbb{P}(|N - \mathbb{E}(N)| < 2) = \frac{7}{19} \approx 0.3684.$$

6.3:15. Sea  $Y = a + bX$ . Para reducir la desviación estándar, se toma  $b = 9/13.5 = 2/3$ . La condición de media da  $a + (2/3)(9.64) = 12$ , por lo que

$$Y = 5.573\bar{3} + \frac{2}{3}X.$$

6.3:16. La razón dada identifica una Poisson con parámetro 2.5:

- a) Al normalizar,  $1 = \mathbb{P}(X = 0)e^{2.5}$ , así que  $\mathbb{P}(X = 0) = e^{-2.5}$ .
- b)  $\mathbb{P}(X = x) = e^{-2.5}2.5^x/x!$ .
- c)  $\mathbb{E}(X) = 2.5$ .

6.3:17. Si el premio es  $Y = 2^n$  con probabilidad  $2^{-n}$ ,  $n \geq 1$ , entonces

$$\mathbb{E}Y = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

El valor esperado infinito explica la paradoja: no representa una cantidad razonable que una persona con recursos limitados pagaría por jugar.

6.3:18. Sea  $N \sim \text{Pois}(35)$ . Como  $\mathbb{E}(N^2) = 35 + 35^2 = 1260$ ,

- a)  $\mathbb{E}(W) = -100 + \mathbb{E}N + 2\mathbb{E}(N^2) = -100 + 35 + 2520 = 2455$ .
- b) En una hora,  $p = \mathbb{P}(\text{Pois}(5) > 7) \approx 0.133372$ . Si  $D \sim \text{Bin}(5, p)$ , la probabilidad pedida es  $\mathbb{P}(D \geq 4) = 5p^4(1-p) + p^5 \approx 0.001413$ .

6.3:19. Se requiere  $\mathbb{P}(|X - 100| < 2) \geq 0.95$ . En el caso límite,  $2/\sigma_x = z_{0.975}$ , así que

$$\sigma_{x,\text{máx}} = \frac{2}{1.959964} \approx 1.0204 \text{ ml.}$$

6.3:20. Si  $T \sim N(40, 7^2)$ ,

- a) Salir a las 10:35 deja 55 minutos;  $\mathbb{P}(T > 55) = 1 - \Phi(15/7) \approx 0.01606$ .
- b) Suponiendo días independientes y la misma distribución,  $L \sim \text{Bin}(20, 0.01606)$  y  $\mathbb{P}(L > 2) \approx 0.00385$ .
- c) Se necesita  $\mathbb{P}(T \leq t) = 0.9$ , de modo que  $t = 40 + 7z_{0.9} \approx 48.97$  minutos. Debe salir aproximadamente a las 10:41 A.M.

6.3:21. En un año,  $p = \mathbb{P}(X > 50) = 1 - \Phi(2.5) \approx 0.006210$ . Suponiendo independencia anual, esperar más de diez años significa que el evento no ocurre en los primeros diez:

$$(1 - p)^{10} \approx 0.93961.$$

6.3:22. Para cada inversionista,  $p = \mathbb{P}(X > 2000) = e^{-1}$ . Si  $Y \sim \text{Bin}(10, e^{-1})$ ,

$$\mathbb{P}(Y \geq 9) = 10(e^{-1})^9(1 - e^{-1}) + (e^{-1})^{10} \approx 0.0008255.$$

6.3:23. Sean  $z_{0.33} = \Phi^{-1}(0.33)$  y  $z_{0.695} = \Phi^{-1}(0.695)$ . Las ecuaciones

$$50 = \mu + \sigma z_{0.33}, \quad 60 = \mu + \sigma z_{0.695}$$

dan  $\mu \approx 54.6307$  y  $\sigma \approx 10.5265$ .

- a)  $\mu \approx 54.6307$  y  $\sigma^2 \approx 110.8064$ .
- b)  $\mathbb{P}(X > 70) \approx 0.07214$ , es decir, 7.214 %.
- c)  $Y \sim N(1.1\mu + 5, 1.1^2\sigma^2)$ , aproximadamente  $N(65.0938, 134.0758)$ . Además,  $\mathbb{P}(70 < Y < 80) \approx 0.23690$ .

## 7. Función generadora de momentos y transformaciones de variables aleatorias

### 7.1. Comprensión teórica

7.1.1. Como  $M_X(0) = 1$ ,  $M'_X(0) = \mathbb{E}(X)$  y  $M''_X(0) = \mathbb{E}(X^2)$ ,

$$\psi'_X(t) = \frac{M'_X(t)}{M_X(t)},$$

de modo que  $\psi'_X(0) = \mathbb{E}(X)$ . Además,

$$\psi''_X(t) = \frac{M''_X(t)M_X(t) - [M'_X(t)]^2}{[M_X(t)]^2}.$$

Al evaluar en cero se obtiene  $\psi''_X(0) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \text{Var}(X)$ .

7.1.2. Por definición,

$$M_W(t) = \mathbb{E}(e^{t(aY+b)}) = e^{bt}\mathbb{E}(e^{atY}) = e^{bt}M_Y(at),$$

para los valores de  $t$  tales que  $M_Y(at)$  exista.

- 7.1.3. a) Verdadera. La f.g.m., cuando existe en un intervalo abierto que contiene al cero, determina de manera única la distribución.
- b) Falsa. Un número finito de momentos no determina en general la distribución. Por ejemplo, una normal estándar y una variable con masa  $1/6, 2/3, 1/6$  en  $-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}$  tienen iguales sus tres primeros momentos, pero distribuciones distintas.
- c) Falsa. Por ejemplo, si  $X$  tiene distribución lognormal,  $\mathbb{E}(e^{tX}) = \infty$  para todo  $t > 0$ .
- d) Verdadera. La existencia de la f.g.m. en un entorno de cero permite derivar bajo el signo de esperanza y  $M_X^{(k)}(0) = \mathbb{E}(X^k)$ .

7.1.4. El método de la función de distribución parte de  $F_Y(y) = \mathbb{P}(g(X) \leq y)$  y traduce este evento a valores de  $X$ ; puede usarse aun cuando  $g$  no sea uno a uno. El teorema de cambio de variable emplea inversas y sus derivadas. Si  $g$  no es uno a uno, el soporte debe dividirse en intervalos donde sea monótona y se deben sumar las contribuciones de todas las ramas inversas que conduzcan al mismo valor de  $y$ .

7.1.5. La transformación  $g(x) = x^2$  no es uno a uno en  $\mathbb{R}$ : para cada  $y > 0$  hay dos preimágenes,  $x_1(y) = \sqrt{y}$  y  $x_2(y) = -\sqrt{y}$ . Por ello, ambas contribuciones deben incluirse:

$$f_Y(y) = f_X(\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}} + f_X(-\sqrt{y})\frac{1}{2\sqrt{y}}, \quad y > 0.$$

7.1.6. La igualdad es válida cuando  $g$  es estrictamente creciente en el soporte de  $X$  y  $y$  pertenece al recorrido de  $g$ ; fuera de este recorrido deben añadirse los valores 0 o 1 correspondientes. Si  $g$  es estrictamente decreciente y  $X$  es continua,

$$F_{g(X)}(y) = \mathbb{P}(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y)).$$

En general, si hay átomos, la última expresión es  $1 - F_X(g^{-1}(y)-)$ .

## 7.2. Cálculo y operaciones numéricas

7.2:1. De  $M_X(0) = 1$  se obtiene  $a + b = 1$ . La f.g.m. corresponde a una variable con masa  $a$  en 1 y  $b$  en 2, por lo que  $\text{Var}(X) = ab = 2/9$ . Así,  $a(1 - a) = 2/9$ , cuyas soluciones son  $1/3$  y  $2/3$ . Como  $a < 1/2$ ,  $a = 1/3$  y  $b = 2/3$ . Por tanto,

$$\mathbb{E}(X) = a + 2b = \frac{5}{3}.$$

7.2:2. a) Derivando la f.g.m.,  $\mathbb{E}(Y) = 3/4$  y  $\text{Var}(Y) = 3/16$ .

b) Es una distribución gamma con forma 3 y escala  $1/4$ ; su soporte es  $(0, \infty)$  y no es simétrica.

c)

$$M_W(t) = e^{-2t} M_Y(6t) = e^{-2t} (1 - 1.5t)^{-3}, \quad t < \frac{2}{3}.$$

d) Al derivar esta f.g.m., o usar sus cumulantes, se obtiene  $\mathbb{E}(W) = 5/2$  y  $\text{Var}(W) = 27/4$ .

7.2:3. Para  $K_X(t) = \log M_X(t) = at - \log(1 - bt^2)$ , se tiene  $K'_X(0) = a$  y  $K''_X(0) = 2b$ . Como estas cantidades son la media y la varianza,  $a = 3$  y  $b = 1$ .

7.2:4. a) Por LOTUS,

$$\mathbb{E}(e^{3Y/2}) = \int_{-\infty}^0 e^{5y/2} dy = \frac{2}{5}.$$

b)

$$M_Y(t) = \int_{-\infty}^0 e^{(t+1)y} dy = \frac{1}{1+t}, \quad t > -1.$$

c) Como  $M'_Y(0) = -1$  y  $M''_Y(0) = 2$ ,  $\text{Var}(Y) = 2 - (-1)^2 = 1$ .

7.2:5. Completando el cuadrado,

$$M_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - x^2/2} dx = e^{t^2/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-t)^2/2} dx = e^{t^2/2}.$$

7.2:6. Para  $X \sim N(0, 1)$ ,  $\mathbb{E}(X) = 0$ ,  $\mathbb{E}(X^2) = 1$  y  $\mathbb{E}(X^3) = 0$ . Por simetría,  $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(Y^3) = 0$ , y

$$\mathbb{E}(Y^2) = 3 \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right) = 1.$$

Los tres primeros momentos coinciden, pero las distribuciones no:  $X$  es continua y  $Y$  toma únicamente tres valores.

7.2:7. Para  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k + 1) = F_X(k + 1) - F_X(k) = e^{-\lambda k} (1 - e^{-\lambda}).$$

7.2:8. a) Para  $0 \leq y \leq 1$ ,  $F_{Y_1}(y) = \mathbb{P}(-y \leq U \leq y) = y$ . Por tanto,

$$f_{Y_1}(y) = \mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

b) Para  $1 \leq y \leq 2$ ,

$$F_{Y_2}(y) = \mathbb{P}(|U| \leq \sqrt{y-1}) = \sqrt{y-1},$$

y

$$f_{Y_2}(y) = \frac{1}{2\sqrt{y-1}} \mathbb{1}_{(1,2)}(y).$$

c) Como  $U + 1$  es uniforme en  $(0, 2)$ ,  $Y_3$  tiene soporte  $(1/2, \infty)$ . Para  $y > 1/2$ ,

$$F_{Y_3}(y) = \mathbb{P}\left(U + 1 \geq \frac{1}{y}\right) = 1 - \frac{1}{2y},$$

por lo que  $f_{Y_3}(y) = \frac{1}{2y^2} \mathbb{1}_{(1/2, \infty)}(y)$ .

7.2:9. Las dos primeras transformaciones tienen soporte  $(-1, 1)$  y la tercera,  $(0, 1)$ . Aplicando cambio de variable,

$$f_{U_1}(u) = \frac{1-u}{2} \mathbb{1}_{(-1,1)}(u),$$

$$f_{U_2}(u) = \frac{1+u}{2} \mathbb{1}_{(-1,1)}(u),$$

y

$$f_{U_3}(u) = \frac{1-\sqrt{u}}{\sqrt{u}} \mathbb{1}_{(0,1)}(u).$$

7.2:10. Si  $\beta > 0$ , el soporte es  $(0, 1)$  y

$$F_Y(y) = y^\beta, \quad f_Y(y) = \beta y^{\beta-1} \mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

Si  $\beta < 0$ , la transformación es decreciente y el soporte es  $(1, \infty)$ . Entonces

$$F_Y(y) = 1 - y^\beta, \quad f_Y(y) = -\beta y^{\beta-1} \mathbb{1}_{(1, \infty)}(y).$$

7.2:11. La transformación es creciente, tiene soporte  $(0, 1)$  e inversa  $x = y/(1-y)$ . Así,

$$F_Y(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{1-y}\right), \quad 0 < y < 1,$$

y

$$f_Y(y) = \frac{1}{(1-y)^2} \exp\left(-\frac{y}{1-y}\right) \mathbb{1}_{(0,1)}(y).$$

7.2:12. El soporte de  $Y$  es  $(0, 1)$ . Para  $0 < y < 1$ , las ramas inversas son  $x_1 = -\sqrt{1-y}$  y  $x_2 = 1-y$ . Por tanto,

$$f_Y(y) = \frac{3[1-\sqrt{1-y}]^2}{16\sqrt{1-y}} + \frac{3}{8}(2-y)^2, \quad 0 < y < 1,$$

y la densidad es cero fuera de ese intervalo.

7.2:13. La inversa es  $x = by/(1+y)$  y  $|dx/dy| = |b|/(1+y)^2$ . Si  $b > 0$ , el soporte es  $(a/(b-a), \infty)$  y

$$f_Y(y) = \frac{b}{(b-a)(1+y)^2} \mathbb{1}_{(a/(b-a), \infty)}(y).$$

Si  $b < 0$ , el soporte es  $(-\infty, a/(b-a))$  y se sustituye  $b$  por  $|b|$  en el numerador. Si  $b = 0$ ,  $Y = -1$  casi seguramente; en ese caso no tiene densidad respecto de Lebesgue.

7.2:14. Como el seno es creciente en  $(-\pi/2, \pi/2)$ , la inversa es  $\theta = \arcsin(y/A)$  y

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi\sqrt{A^2 - y^2}} \mathbb{1}_{(-A, A)}(y).$$

7.2:15. Para  $y > c$ ,

$$F_Y(y) = \mathbb{P}(X \leq \log(y/c)) = 1 - e^{-\lambda \log(y/c)} = 1 - \left(\frac{c}{y}\right)^\lambda.$$

Por derivación,

$$f_Y(y) = \frac{\lambda c^\lambda}{y^{\lambda+1}} \mathbb{1}_{(c, \infty)}(y).$$

Así,  $Y \sim \text{Pareto}(\alpha = \lambda, \theta = c)$ .

7.2:16. a) Para  $y > 0$ , las ramas son  $\sqrt{y}$  y  $-\sqrt{y}$ . Por simetría de la densidad normal,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} e^{-y/2} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(y).$$

b) Esta es la densidad de una variable  $\chi_1^2$ , equivalentemente una gamma con forma  $1/2$  y tasa  $1/2$ .

c)

$$\mathbb{P}(Y > 4) = \mathbb{P}(\chi_1^2 > 4) = 1 - F_{\chi_1^2}(4) \approx 0.0455003.$$

En R, el valor numérico se obtiene con `pchisq(4,1,lower.tail=FALSE)`.

7.2:17. Si  $X \sim \text{Gamma}(4, 2)$  con tasa 2, entonces  $cX \sim \text{Gamma}(4, 2/c)$ . Como  $Y \sim \chi_8^2$  equivale a  $\text{Gamma}(4, 1/2)$ , se requiere  $2/c = 1/2$ , es decir,  $c = 4$ . En consecuencia,

$$\mathbb{P}(X > 5) = \mathbb{P}(4X > 20) = \mathbb{P}(\chi_8^2 > 20) \approx 0.0103361.$$

En R, el valor se obtiene con `pchisq(20,8,lower.tail=FALSE)`.

### 7.3. Planteamiento y modelación

7.3:1. Si  $N$  cuenta las marcas de la región, entonces  $N \sim \text{Hipergeom}(18, 6, 4)$  y

$$M_N(t) = \sum_{k=0}^4 e^{tk} \frac{\binom{6}{k} \binom{12}{4-k}}{\binom{18}{4}}.$$

7.3:2. Si  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$  es el tiempo de espera, el tiempo total es  $T = 5 + 2X$ . Por tanto,

$$M_T(t) = e^{5t} \frac{\lambda}{\lambda - 2t}, \quad t < \frac{\lambda}{2},$$

$$\mathbb{E}(T) = 5 + 2/\lambda \text{ y } \text{Var}(T) = 4/\lambda^2.$$

7.3:3. Como  $F_X(x) = x^2$  para  $0 < x < 1$  y  $A = X^2/16$ , el soporte de  $A$  es  $(0, 1/16)$ . Para  $0 < a < 1/16$ ,

$$F_A(a) = \mathbb{P}(X \leq 4\sqrt{a}) = 16a.$$

$$\text{Así, } f_A(a) = 16 \mathbb{1}_{(0, 1/16)}(a).$$

7.3:4. Para  $h > 0$ ,

$$F_H(h) = \mathbb{P}\left(\Theta \leq \arctan \frac{h}{R}\right) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{h}{R}.$$

Por tanto,

$$f_H(h) = \frac{2R}{\pi(R^2 + h^2)} \mathbb{1}_{(0, \infty)}(h).$$

En este modelo la altura puede tomar cualquier valor positivo.

7.3:5. La transformación es creciente, tiene soporte  $(0, 100)$  e inversa

$$x = -t \log \left( 1 - \frac{y}{100} \right).$$

Así, para  $0 < y < 100$ ,

$$F_Y(y) = 1 - \left( 1 - \frac{y}{100} \right)^{\lambda t},$$

y

$$f_Y(y) = \frac{\lambda t}{100} \left( 1 - \frac{y}{100} \right)^{\lambda t - 1} \mathbb{1}_{(0,100)}(y).$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(Y > 75) = \mathbb{P}(X > t \log 4) = 4^{-\lambda t}.$$

## 8. Autoevaluación. Variables aleatorias

### 8.2. Cálculo y operaciones numéricas

8.2:1. Como

$$\int_{-2}^4 \frac{|x|}{10} dx = \int_{-2}^0 \frac{-x}{10} dx + \int_0^4 \frac{x}{10} dx = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1,$$

$f$  es una densidad.

a) Para  $-2 < x < 0$ ,

$$F_X(x) = \int_{-2}^x \frac{-u}{10} du = \frac{4 - x^2}{20}.$$

Para  $0 \leq x < 4$ ,

$$F_X(x) = F_X(0) + \int_0^x \frac{u}{10} du = \frac{1}{5} + \frac{x^2}{20} = \frac{x^2 + 4}{20}.$$

Por tanto,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -2, \\ \frac{4 - x^2}{20}, & -2 < x < 0, \\ \frac{x^2 + 4}{20}, & 0 \leq x < 4, \\ 1, & x \geq 4. \end{cases}$$

b)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-2}^0 x \frac{-x}{10} dx + \int_0^4 x \frac{x}{10} dx = \frac{28}{15},$$

y

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-2}^0 x^2 \frac{-x}{10} dx + \int_0^4 x^2 \frac{x}{10} dx = \frac{34}{5}.$$

Así,

$$\text{Var}(X) = \frac{34}{5} - \left( \frac{28}{15} \right)^2 = \frac{746}{225}.$$

c) Como  $F_X(0) = 1/5$ , los tres cuantiles son positivos. Al resolver

$$\frac{x^2 + 4}{20} = p$$

se obtiene  $q_p = \sqrt{20p - 4}$ . Por ello,

$$q_{0.25} = 1, \quad q_{0.5} = \sqrt{6}, \quad q_{0.75} = \sqrt{11}.$$

d) Se tiene  $\mathbb{P}(U = 1) = \mathbb{P}(X \geq 0) = 4/5$  y  $\mathbb{P}(U = -1) = 1/5$ . Entonces

$$M_U(t) = \mathbb{E}(e^{tU}) = \frac{4}{5}e^t + \frac{1}{5}e^{-t}.$$

La media puede calcularse directamente o derivando la f.g.m.:

$$\mathbb{E}(U) = M'_U(0) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

e) La transformación  $V = X/2 + 2$  es creciente, con inversa  $x = 2v - 4$  y jacobiano  $|dx/dv| = 2$ . Como  $-2 < x < 4$ , el soporte es  $1 < v < 4$ . Por tanto,

$$f_V(v) = f_X(2v - 4)2 = \frac{|2v - 4|}{5} \mathbf{1}_{(1,4)}(v).$$

8.2:2. La distribución dada es Laplace con centro 0 y escala 1.

a) Para  $p < 1/2$ ,  $p = e^x/2$ , mientras que para  $p \geq 1/2$ ,  $p = 1 - e^{-x}/2$ . De aquí,

$$q_{0.25} = -\log 2, \quad q_{0.5} = 0, \quad q_{0.75} = \log 2.$$

b) Para  $Y = \alpha + \beta X$ , con  $\beta > 0$ , la inversa es  $x = (y - \alpha)/\beta$ . Entonces

$$f_Y(y) = \frac{1}{\beta} f_X\left(\frac{y - \alpha}{\beta}\right) = \frac{1}{2\beta} \exp\left(-\frac{|y - \alpha|}{\beta}\right), \quad y \in \mathbb{R}.$$

c) En el enunciado, la f.g.m. proporcionada debe corresponder a  $X$ :

$$M_X(t) = \frac{1}{1 - t^2}, \quad |t| < 1.$$

Por las propiedades de la f.g.m.,

$$M_Y(t) = \mathbb{E}(e^{t(\alpha + \beta X)}) = e^{\alpha t} M_X(\beta t) = \frac{e^{\alpha t}}{1 - \beta^2 t^2}, \quad |t| < \frac{1}{\beta}.$$

8.2:3. Como  $X \sim N(52, 3^2)$ :

a)

$$\mathbb{P}(50 \leq X \leq 54) = \mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \leq Z \leq \frac{2}{3}\right).$$

Por simetría y usando el dato proporcionado,

$$\mathbb{P}\left(-\frac{2}{3} \leq Z \leq \frac{2}{3}\right) = 1 - 2(0.2525) = 0.495.$$

b) De  $\mathbb{P}(Y > 55) = 0.75$  se sigue que

$$\mathbb{P}\left(Z \leq \frac{55 - \mu}{3}\right) = 0.25.$$

Así,  $(55 - \mu)/3 = -0.6745$  y

$$\mu = 55 + 3(0.6745) = 57.0235.$$

8.2:4. Por simetría,  $\mathbb{P}(Z \leq 0) = 0.5$ . Además, como el cuantil 0.2 es  $-0.8416$ ,

$$\mathbb{P}(Z < 0.8416) = 0.8.$$

En consecuencia,

$$\mathbb{P}(X = 1) = 0.5, \quad \mathbb{P}(X = 2) = 0.3, \quad \mathbb{P}(X = 3) = 0.2,$$

y

$$\mathbb{E}(X) = 1(0.5) + 2(0.3) + 3(0.2) = 1.7.$$

8.2:5. La f.m.p. se obtiene con los tamaños de los saltos de  $F$ :

$$\begin{aligned} p_X(-5) &= 0.15, & p_X(2) &= 0.40 - 0.15 = 0.25, \\ p_X(3) &= 0.80 - 0.40 = 0.40, & p_X(9) &= 1 - 0.80 = 0.20. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$p_X(x) = \begin{cases} 0.15, & x = -5, \\ 0.25, & x = 2, \\ 0.40, & x = 3, \\ 0.20, & x = 9, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usando  $q_p = \inf\{x : F(x) \geq p\}$ ,

$$q_{0.25} = 2, \quad q_{0.5} = 3, \quad q_{0.75} = 3.$$

8.2:6. a) A partir de la tabla,

$$\mathbb{E}(X) = \sum_x x p_X(x) = 0.9.$$

La función acumulada rebasa 0.5 por primera vez en  $x = 1$ , de modo que la mediana es 1. La probabilidad máxima es 0.2, alcanzada en  $-1$  y  $1$ ; ambas son modas. La distribución no es simétrica. En efecto, si lo fuera, el centro de simetría tendría que ser el punto medio entre los extremos del soporte, es decir, 1.5; sin embargo, los puntos  $-2$  y  $5$ , equidistantes de 1.5, tienen probabilidades 0.1 y 0.05, respectivamente.

b)

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_x x^2 p_X(x) = 4.6.$$

Entonces

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = 4.6 - 0.9^2 = 3.79.$$

c) Para el primer cociente,  $\{X^2 \leq 2\} = \{-1, 0, 1\}$ :

$$\mathbb{P}(X < 1 \mid X^2 \leq 2) = \frac{0.2 + 0.15}{0.2 + 0.15 + 0.2} = \frac{7}{11}.$$

Asimismo,

$$\mathbb{P}(X^2 > 2 \mid X < 1) = \frac{\mathbb{P}(X = -2)}{\mathbb{P}(X \in \{-2, -1, 0\})} = \frac{0.1}{0.45} = \frac{2}{9}.$$

Finalmente,

$$\mathbb{P}(X < 0 \mid X^2 \geq 1) = \frac{0.1 + 0.2}{1 - 0.15} = \frac{6}{17}.$$

d) Como  $Y = \mathbf{1}_{\{X>0\}}$ ,  $Y \sim \text{Bernoulli}(0.55)$ . Por tanto,

$$\mathbb{E}(W) = a - 3b\mathbb{E}(Y) = a - \frac{33}{20}b,$$

y

$$\text{Var}(W) = 9b^2\text{Var}(Y) = 9b^2(0.55)(0.45) = \frac{891}{400}b^2.$$