

Valuación actuarial de bonos catastróficos

Dr. Juan José Fernández Durán ¹
Dra. Mercedes Gregorio Domínguez ²

¹Departamento de Estadística
ITAM

²Departamento de Actuaría y Seguros
ITAM

23 de Noviembre de 2007

Contenido

- 1 Introducción
- 2 Cálculo Actuarial del Precio del Bono
- 3 Estimación de tasas de ocurrencia

Introducción

- Referencia: Fernández-Durán, J.J. y Gregorio-Domínguez, M.M. (2005) Cálculo de Bonos Catastróficos para Desastres Naturales en México. El Trimestre Económico, LXXII (4), núm. 288, pp. 877-912.
- Una gran cantidad de fenómenos naturales ocurren cada año en México entre los que se encuentran terremotos, huracanes, inundaciones, sequías, etc.
- Algunos de estos fenómenos naturales son clasificados como desastres o catástrofes debido al impacto económico que producen en las poblaciones afectadas.
- Según el Centro Nacional para Prevención de Desastres (CENAPRED) un terremoto se clasifica como desastre si causa cien o más pérdidas de vidas humanas o pérdidas económicas significativas a nivel nacional.

Bonos Catastróficos

- Un bono catastrófico es similar a un bono ordinario pero con la peculiaridad de que el pago de los cupones y/o el principal al inversionista es contingente a la ocurrencia del evento catastrófico.
- La ocurrencia del evento catastrófico se especifica a través de que cierta medida objetiva rebase cierto umbral. Estas medidas objetivas o índices deben estar altamente correlacionadas con la magnitud de la pérdida económica.
- Por ejemplo, un bono catastrófico para terremotos está referido a la magnitud en escala Richter en el epicentro; si es emitido por una aseguradora puede estar referida al monto de las pérdidas de los asegurados.

Ventajas de los bonos catastróficos

- 1 No existe riesgo de crédito para el emisor.
- 2 En caso de ocurrir el evento catastrófico, el gobierno cuenta inmediatamente con fondos para hacer frente al desastre.
- 3 El costo para el gobierno del bono catastrófico puede ser inferior a la prima del seguro.
- 4 El bono catastrófico no está correlacionado con el mercado financiero por lo que es útil en la diversificación de carteras de inversión.
- 5 La emisión de bonos catastróficos puede evitar fuertes desajustes en el presupuesto del gobierno debido a la ocurrencia de eventos catastróficos.

Cálculo Actuarial del Precio del Bono

El precio de un bono catastrófico puede definirse como la cantidad de dinero que el inversionista debería aportar por participar en una apuesta justa. Dicha apuesta se basa en dos posibles resultados:

- 1 El evento catastrófico ocurre durante la vigencia del bono y el emisor del bono tendrá el derecho de adjudicarse cierta parte o el total de la inversión especificada en el contrato del bono catastrófico. Los beneficios a pagar a los inversionistas pueden ser diferidos; o
- 2 El evento catastrófico no ocurre durante la vigencia del bono y el inversionista se hace acreedor a ciertos beneficios superiores a los que otorga un bono ordinario con las mismas condiciones y calculado con la tasa de interés libre de riesgo del mercado.

De esta forma, la apuesta resulta atractiva tanto al inversionista como al emisor:

- El inversionista puede obtener, con una alta probabilidad ya que los eventos catastróficos ocurren con una frecuencia muy baja, rendimientos superiores a la tasa de interés libre de riesgo.
- El emisor obtiene un seguro contra el evento catastrófico.

Para obtener el precio de esta apuesta se emplea un enfoque actuarial en el que se supone que en promedio el valor presente de los beneficios es igual al valor presente de las pérdidas del emisor del bono.

Características del bono

- Valor nominal N_0 . En base al cual se definen los beneficios.
- Vigencia del bono R . Medido en años.
- Beneficios a pagar en caso no ocurrencia del siniestro, B_{NE} . Se pagan beneficios a una fuerza de interés δ_{NE} al final de la vigencia del bono.

$$B_{NE} = N_0 e^{\delta_{NE} R}$$

- Beneficios a pagar en caso de ocurrencia del siniestro, B_T . Se pagan beneficios un tiempo S después del siniestro a una fuerza de interés δ_{E0} antes de la catástrofe y a una fuerza de interés δ_{E1} después de la catástrofe.

$$B_T = (1 - \gamma_E) N_0 e^{\delta_{E0} T + \delta_{E1} S}$$

Se considera el cálculo actuarial del precio de emisión del bono catastrófico en las siguientes dos situaciones:

① Período de diferimiento con duración fija:

- $S = \text{constante}$;
- B_T se paga al tiempo $T + S$;
- $B_T = (1 - \gamma_E) N_0 e^{\delta_{E0} T + \delta_{E1} S}$

② Período de diferimiento aleatorio:

- $S = R - T$;
- B_T se paga al tiempo R ;
- $B_T = (1 - \gamma_E) N_0 e^{\delta_{E0} T + \delta_{E1} (R - T)}$

Período de diferimiento con duración fija

La variable aleatoria V_0 , el valor del bono en $t = 0$, está definida de la siguiente forma:

$$V_0 = \begin{cases} P_0 - B_T e^{-\delta_{CETES}(T+S)} & \text{si } T \leq R \\ P_0 - B_{NE} e^{-\delta_{CETES}R} & \text{si } T > R \end{cases}$$

Si definimos D_T como el dinero disponible para el emisor al momento de la ocurrencia del evento ($T \leq R$)

$$D_T = P_0 e^{\delta_{CETES}T} - B_T e^{-\delta_{CETES}S}$$

$$V_0 = \begin{cases} D_T e^{-\delta_{CETES}T} & \text{si } T \leq R \\ P_0 - B_{NE} e^{-\delta_{CETES}R} & \text{si } T > R \end{cases}$$

Distribución tiempo de espera

Para obtener el valor del precio de emisión del bono catastrófico, P_0 , se especifica:

$$E(V_0) = 0,$$

Consideremos que la variable aleatoria del tiempo de espera para la ocurrencia del evento catastrófico, T , tiene la siguiente función de densidad:

$$f_{T_u}(t) = \lambda(T_u + t)e^{-\int_{T_u}^{T_u+t} \lambda(v)dv} \quad \text{para } t > 0$$

T_u denota el tiempo que ha transcurrido desde la última ocurrencia del evento catastrófico, $T_u > 0$.

Si $\lambda(T_u + t) = \lambda$, entonces $f_{T_u}(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ es una función de densidad exponencial y el proceso de ocurrencias del evento catastrófico corresponde a un proceso de Poisson sin memoria (homogéneo).

$$E(V_0) = \int_0^R D_t e^{-\delta_{CETES} t} \lambda(T_u + t) e^{-\int_{T_u}^{T_u+t} \lambda(v) dv} dt + \int_R^\infty (P_0 - B_{NE} e^{-\delta_{CETES} t}) \lambda(T_u + t) e^{-\int_{T_u}^{T_u+t} \lambda(v) dv} dt$$

que es equivalente a

$$\int_0^R \left(P_0 - (1 - \gamma_E) N_0 e^{\delta_{E0} t} e^{\delta_{E1} S} e^{-\delta_{CETES}(t+S)} \right) \lambda(T_u + t) e^{-\int_{T_u}^{T_u+t} \lambda(v) dv} dt + \int_R^\infty (P_0 - N_0 e^{\delta_{NE} R} e^{-\delta_{CETES} R}) \lambda(T_u + t) e^{-\int_{T_u}^{T_u+t} \lambda(v) dv} dt.$$

Resolviendo para $P_0 = P(\lambda(T_u + t), R, S, N_0, \gamma_E, \delta_{E0}, \delta_{E1}, \delta_{NE}, \delta_{CETES})$:

$$P_0 = (1 - \gamma_E) N_0 e^{-(\delta_{CETES} - \delta_{E1}) S} \int_0^R e^{-(\delta_{CETES} - \delta_{E0}) t} \lambda(T_u + t) e^{-\int_{T_u}^{T_u+t} \lambda(v) dv} dt + N_0 e^{-(\delta_{CETES} - \delta_{NE}) R - \int_{T_u}^{T_u+R} \lambda(v) dv}.$$

Período de diferimiento con duración aleatoria

En este caso, el período durante el cual se aplica la fuerza de interés anual δ_{E1} , el intervalo $(T, R]$, resulta tener una duración aleatoria $R - T$ en vez de fija e igual a S . En este caso, la variable aleatoria V_0 está definida como

$$V_0 = \begin{cases} P_0 - B_T e^{-\delta_{CETES} R} & \text{si } T \leq R \\ P_0 - B_{NE} e^{-\delta_{CETES} R} & \text{si } T > R \end{cases}$$

con $D_T = P_0 e^{\delta_{CETES} T} - B_T e^{-\delta_{CETES}(R-T)}$

$$V_0 = \begin{cases} D_T e^{-\delta_{CETES} T} & \text{si } T \leq R \\ P_0 - B_{NE} e^{-\delta_{CETES} R} & \text{si } T > R \end{cases}$$

Resolviendo la ecuación $E(V_0) = 0$ para P_0 se obtiene

$$P_0 = (1 - \gamma_E) N_0 e^{-(\delta_{CETES} - \delta_{E1})R} \int_0^R e^{-(\delta_{E1} - \delta_{E0})t} \lambda(T_u + t) e^{-\int_{T_u}^{T_u+t} \lambda(v) dv} dt$$

$$+ N_0 e^{-(\delta_{CETES} - \delta_{NE})R - \int_{T_u}^{T_u+R} \lambda(v) dv}.$$

Considerando $\lambda(v) = \lambda$:

Tabla de precios del bono catastrófico

Tipo	Caso	S	λ	i_{CETES}	γ_E	$B_{R/2}$ en $S + \frac{R}{2}$	B_{NE}	i_{NE}^*	αP_0	ωP_0
1	1	1	0.05	0.05	0.00	103.77	99.93	4.9308%	-2.38	-0.06
	2				0.10	93.40	100.45	5.4761%	7.38	9.95
	3				0.25	77.83	101.23	6.2940%	22.02	24.96
	4				0.50	51.89	102.53	7.6571%	46.43	49.97
	5				0.75	25.94	103.83	9.0203%	70.83	74.99
	6				0.90	10.38	104.61	9.8382%	85.48	89.99
1b	1	1	0.05	0.05	0.00	106.30	99.81	4.6863%	-4.76	-3.63
	2				0.10	95.67	100.34	5.3564%	5.24	7.75
	3				0.25	79.73	101.14	6.1942%	20.24	23.13
	4				0.50	53.15	102.47	7.5906%	45.24	48.75
	5				0.75	26.58	103.80	8.9871%	70.24	74.38
	6				0.90	10.63	104.60	9.8249%	85.24	89.75
2	1		0.05	0.05	0.00	104.39	99.90	4.8988%	-2.38	-1.25
	2				0.10	93.95	100.43	5.4473%	7.38	8.88
	3				0.25	78.29	101.21	6.2700%	22.02	24.06
	4				0.50	52.19	102.52	7.6412%	46.43	49.38
	5				0.75	26.10	103.82	9.0123%	70.83	74.69
	6				0.90	10.44	104.60	9.8350%	85.48	89.88
3	1		0.05	0.05	1.00	0.00	105.13	10.3835%	95.24	100.00

Cuadro: Ejemplos numéricos de los distintos tipos de bonos catastróficos (1, 1b y 2) con $P_0=95.94$, $N_0=100$ y α y ω seleccionadas

Estimación de tasas de ocurrencia

- Referencia: Barrientos, L., Fernández-Durán, J.J. y Rivero, F.J. (2007) Análisis geográfico y estadístico de la sismicidad en la costa mexicana del Pacífico. Boletín de los Sistemas Nacionales Estadístico y de Información Geográfica (INEGI), 3-1, pp. 3-26.
- Se ajustan modelos de procesos de Poisson no homogéneos donde la tasa de ocurrencia puede ser función de variables explicativas tales como características del sismo inmediato anterior (magnitud, profundidad, latitud, longitud, etc.) y los periodos de ocurrencia de sismos anteriores.
- El principal objetivo de la construcción de estos modelos predictivos para los tiempos de ocurrencia es la identificación de variables que sean significativas para explicar la variabilidad en los periodos de ocurrencia de los sismos cuya magnitud es mayor o igual a 6.5 grados en la

- Es posible que ninguna de las variables explicativas sea significativa en cuyo caso el modelo ajustado corresponde a un proceso de Poisson homogéneo cuya tasa de ocurrencia es constante.
- El ajuste de los modelos se lleva a cabo mediante el método de máxima verosimilitud aplicado a modelos lineales generalizados, en particular, modelos loglineales.

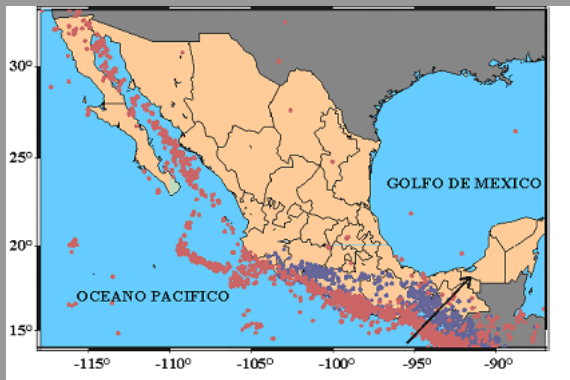
Base de datos

- Se seleccionaron los 137 sismos que acontecieron en la costa del Pacífico, desde el estado de Jalisco hasta la frontera con Guatemala cuya magnitud es mayor o igual a 6.5 grados en la escala de Richter.
- Considerando las diferencias en las características de los sismos de acuerdo a la localización del epicentro se llevó a cabo una división de la costa mexicana del Pacífico en 6 regiones: Jalisco-Colima, Michoacán, Guerrero, Oaxaca, Chiapas y Guatemala.

Análisis exploratorio

- La descripción estadística de los eventos incluye la agrupación visual, definición de zonas de estudio, generalización de características encontradas y justificadas mediante la teoría sísmica, así como las primeras aproximaciones estadísticas basadas en la exploración de los datos.
- El análisis exploratorio de estos eventos mediante elementos descriptivos permiten establecer relaciones y patrones que definen la sismicidad en México. Para este estudio en particular, estas relaciones y patrones se obtienen para la sismicidad en la costa mexicana del Pacífico en las relaciones magnitud-ocurrencia, magnitud-localización, así como el estudio aislado de los periodos de retorno.

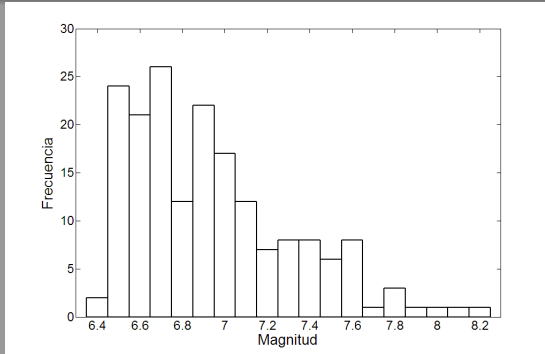
Análisis exploratorio: Magnitudes



Sismos con magnitudes mayores o iguales a 4.5 grados localizados en la República Mexicana entre 1964 y 1995.

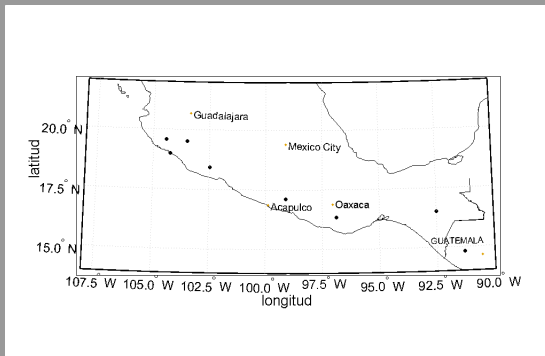
- La mayoría de los sismos se ubican en la superficie de contacto entre las placas tectónicas Norteamericana y de Cocos, zona de subducción y geológicamente de alta peligrosidad sísmica.
- En sismos mayores a 6.4 grados Richter, más del 75 % se localizan en las costas de los estados de Jalisco, Michoacán, Guerrero, Oaxaca y Chiapas, así como en las costas de Guatemala.
57 % de los eventos ocurridos en la costa mexicana del Pacífico presentaron epicentros en Guerrero y Oaxaca.

Análisis Exploratorio: Distribución de magnitudes



Se han presentado 8 sismos con magnitudes mayores a 7.7 grados, los cuales se ubican a lo largo de la costa. Las ocurrencias de estos sismos de gran magnitud se relacionan con el acomodamiento de la placa de Cocos por debajo de la Norteamericana.

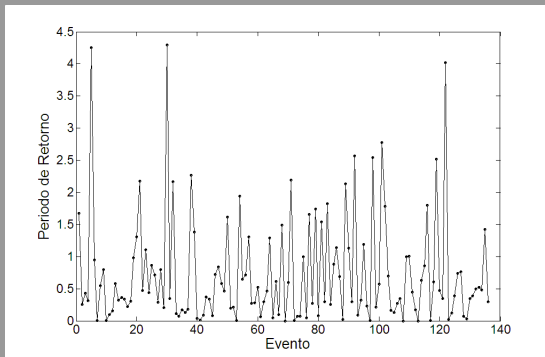
Análisis exploratorio: ubicación espacio-temporal



La ubicación espacial y temporal de los sismos registrados con magnitud mayor a 7.7 grados, permite establecer un patrón de movimiento.

Periodos de retorno

- El periodo de retorno representa el tiempo transcurrido entre dos sismos cualesquiera; generalmente expresado en años y se obtiene una medición por cada dos eventos cronológicamente secuenciales.
- Para un proceso de Poisson homogéneo los tiempos de retorno se distribuyen exponencialmente.
- La siguiente figura mostrará los periodos de retorno para la base de datos considerada. Dichas mediciones fueron calculadas como el cociente entre la diferencia de las fechas en las que ocurrieron dos sismos consecutivos y 365 días.
Este cálculo no consideró la ubicación espacial de los sismos.



El periodo medio de retorno de sismos con magnitud mayor a 6.4 grados es de 263 días aproximadamente ($\hat{\lambda} = 1.3777$).
El rango se encuentra entre algunos segundos, cuando se trata de réplicas, y un poco más de cuatro años.

Sismicidad como proceso de Poisson homogéneo

- Las propiedades del proceso Poisson homogéneo se representan básicamente en la falta de memoria del proceso, es decir, un proceso tipo Poisson considera que cada sismo ocurre aleatoriamente, sin memoria sobre la ubicación, magnitud y tiempo de ocurrencia del sismo que lo precede.
- Se supuso una distribución exponencial con tasa λ para la distribución de los tiempos entre eventos, requisito para definir un proceso de Poisson homogéneo.
Se estimó λ por máxima verosimilitud y se obtuvo
 $\hat{\lambda} = 0.7205$

Variable aleatoria circular

Ocurrencias de sismos
Richter ≥ 6.5

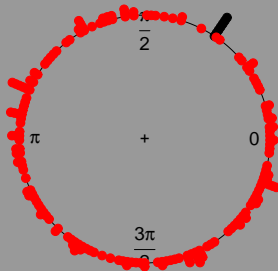


Figura: Histograma circular de las ocurrencias de terremotos (Richter > 6.4).

Variable aleatoria circular

La función de densidad, $f(\theta; \underline{c})$, de una variable aleatoria circular, Θ , debe satisfacer (Batschelet (1981), Fisher (1993), Jammalamadaka and SenGupta (2001) and Upton and Fingleton (1989)):

- 1 $f(\theta; \underline{c}) \geq 0$,
- 2 $\int_0^{2\pi} f(\theta; \underline{c}) d\theta = 1$ y
- 3 $f(\theta + 2k\pi; \underline{c}) = f(\theta; \underline{c})$ para cualquier entero k .

donde \underline{c} es el vector de parámetros.

Condiciones para sumas trigonométricas no negativas

Theorem (Fejér)

La suma trigonométrica de orden n

$$T(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

es no negativa para cualquier número real θ si y sólo si existen números complejos c_k , $k = 0, 1, \dots, n$, tal que

$$a_0 = \sum_{k=0}^n |c_k|^2 \text{ y } a_k - ib_k = 2 \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{\nu+k} \bar{c}_\nu \text{ for } k = 1, 2, \dots, n.$$

Distribuciones circulares basadas en sumas trigonométricas no negativas

Usando el resultado anterior es posible definir una familia de distribuciones circulares

$$f(\theta; \underline{c}, n) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^M (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) \quad (1)$$

donde $\sum_{k=0}^M |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}$ y $a_k - ib_k = 2 \sum_{\nu=0}^{n-k} c_{\nu+k} \bar{c}_\nu$ para números complejos $c_k = c_{rk} + ic_{ck}$ para $k = 1, 2, \dots, M$. El vector de parámetros, \underline{c} , tiene dimensión $2M+2$.

Para identificar los parámetros $c_{c0} = 0$ por lo tanto \underline{c} , tiene dimensión $2M + 1$.

EL orden de la suma trigonométrica , M , también es considerado un parámetro.

Análisis Bayesiano de Distribuciones Basadas en Sumas Trigonométricas No Negativas

Se tiene una muestra aleatoria $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ de una distribución circular desconocida.

Suponemos que puede ser representada por una distribución circular basada en sumas trigonométricas no negativas de la forma

$$f(\theta; \underline{c}, n) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^M (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)) \quad (2)$$

donde $\sum_{k=0}^M |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi}$ y $a_k - ib_k = 2 \sum_{\nu=0}^{M-k} c_{\nu+k} \bar{c}_\nu$ para números complejos $c_k = c_{rk} + ic_{ck}$ for $k = 1, 2, \dots, M$.

Inferencia bayesiana: Número de términos, M , conocido

- Si M es conocida e igual a 0, no hay parámetros \underline{c} a estimar, por lo tanto sólo consideramos el caso $M \geq 1$. Si M es conocido la dimensión del vector de parámetros \underline{c} es conocido.
- El espacio de parámetros \underline{c} es una hiperesfera de dimensión $2M + 1$ para $M \geq 1$. La hiperesfera tiene radio $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Denotemos la hiperesfera de dimensión D y radio r por $S_D(r)$.

Distribución a priori

Supongamos una distribución a priori uniforme para \underline{c} , esto es, una distribución uniforme sobre la hiperesfera de dimensión $2M + 1$ y radio $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $S_{2M+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$.

Entonces, si $M \geq 1$ considera la densidad a priori de \underline{c} , $\pi(\underline{c})$, definida por

$$\pi(\underline{c}) = \frac{1}{\text{Area}(S_{2M+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right))} \quad (3)$$

donde

$$\text{Area}\left(S_{2M+1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\right) = \frac{2\pi^{\frac{2M+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{2M+1}{2}\right)} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{2M} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{M-1}\Gamma\left(M + \frac{1}{2}\right)} \quad (4)$$

Denotemos por $U(S_D(r))$ una distribución uniforme sobre $S_D(r)$.

Función de verosimilitud

La función de verosimilitud estará dada por

$$\pi(\underline{\theta} \mid M, \underline{c}) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^M a_k \cos(k\theta_i) + b_k \sin(k\theta_i) \right) \quad (5)$$

Distribución posterior y algoritmo MCMC

- La distribución posterior de \underline{c} , dado M y el vector de observaciones $\underline{\theta}$, tiene una constante de normalización intratable y entonces la posible solución es considerar un algoritmo de Markov Chain Monte Carlo (MCMC) para obtener muestras de la distribución posterior de \underline{c} y M dados $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$.
- Tomar muestras de una distribución $U(S_D(r))$ puede realizarse mediante un vector muestral, \underline{v} , con distribución D -multivariada normal (por simplicidad independientes y estandarizadas) y dividir cada componente por $r\|\underline{v}\|$ donde $\|\underline{v}\|$ es la norma del vector \underline{v} ,
$$\|\underline{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_D^2}.$$

Algoritmo Metropolis-Hastings

Para obtener muestras de la dist. posterior de \underline{c} dado M y $\underline{\theta}$.

El algoritmo genera una secuencia $\{\underline{c}_j\}_{j=1}^T$ empezando con \underline{c}_0 :

- 1 Dado \underline{c}_j proponer un valor para \underline{c}_{j+1} muestreando un vector de $U(S_{2M+1}(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}))$. Denotar el vector propuesto por \underline{c}_{j+1}^* .
- 2 Calcular la función α que es el cociente de la distribución posterior en \underline{c}_j y \underline{c}_{j+1}^* ,

$$\alpha(\underline{c}_j, \underline{c}_{j+1}^*) = \frac{\pi(\underline{c}_{j+1}^* | M, \underline{\theta})}{\pi(\underline{c}_j | M, \underline{\theta})} \quad (6)$$

- 3 Si $\alpha(\underline{c}_j, \underline{c}_{j+1}^*) \geq 1$ entonces $\underline{c}_{j+1} = \underline{c}_{j+1}^*$. Si $\alpha(\underline{c}_j, \underline{c}_{j+1}^*) < 1$ entonces, generar un número uniforme en el intervalo $(0, 1)$, U , si $U \leq \alpha(\underline{c}_j, \underline{c}_{j+1}^*)$ entonces $\underline{c}_{j+1} = \underline{c}_{j+1}^*$ de otra forma $\underline{c}_{j+1} = \underline{c}_j$

Después del período de calentamiento de tamaño B las

Inferencia bayesiana: Número de términos desconocido

En la práctica, generalmente, el parámetro M es desconocido. Cuando M es desconocido la inferencia de \underline{c} y M dado $\underline{\theta}$ es más complicada ya que la dimensión del espacio de parámetros no está fija.

Es necesaria la implementación de algoritmos transdimensional MCMC donde M determina la dimensión de la hiperesfera donde caen los valores de \underline{c} .

Distribución a priori

Para el parámetro M parameter suponemos una distribución a priori que asigna una probabilidad de 0.5 al caso uniforme ($M = 0$) y el otro 0.5 de probabilidad es asignado uniformemente a los posibles valores de $M > 0$.

Distribución posterior

- En este caso, para obtener muestras de la distribución posterior de M y \underline{c} dado $\underline{\theta}$, $\pi(M, \underline{c} \mid \underline{\theta})$, proponemos un algoritmo MCMC que genera una secuencia de pares (M, \underline{c}) , $\{M_j, \underline{c}_j\}_{j=1}^T$.
- El algoritmo MCMC es un caso especial del algoritmo Metropolis-Hastings donde para cada iteración un nuevo par de valores (M, \underline{c}) es propuesto. Este valor es aceptado o rechazado de acuerdo al cociente de las distribuciones posteriores.
- Las distribuciones propuestas del algoritmo son diferentes dependiendo si la dimensión es creciente o decreciente y se $M = 0$.

Algoritmo Metrópolis-Hastings

Se inicia con el valor (M_0, \underline{c}_0) .

Primero considera el caso donde $M_j \neq 0, M_{j+1}^* \neq 0$:

① No cambia la dimensión ($M_{j+1}^* = M_j$):

$\underline{c}_{j+1} = \underline{c}_j$ and $M_{j+1} = M_j$.

② Incremento en dimensión ($M_{j+1}^* > M_j$):

Generamos la propuesta para el nuevo valor de $\underline{c}_{j+1}, \underline{c}_{j+1}^*$, tomando los valores no normalizados de \underline{c}_j y agregando muestras de distribuciones normales estandarizadas para el resto de los componentes de \underline{c}_{j+1}^* no copiados de \underline{c}_j . Entonces son normalizados.

③ Decremento en dimensión ($M_{j+1}^* < M_j$):

Generamos la propuesta para el nuevo valor de $\underline{c}_{j+1}, \underline{c}_{j+1}^*$, tomando los valores no normalizados de \underline{c}_j y eliminando los componentes no necesarios en \underline{c}_{j+1}^* . Entonces son normalizados.

- Después, consideremos el caso $M_j = 0$ and $M_{j+1}^* \neq 0$, \underline{c}_{j+1}^* es generado de una distribución uniforme en la hiperesfera $S_{2M_{j+1}^*+1} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)$.
- Los últimos dos casos, $M_j \neq 0$ y $M_{j+1}^* = 0$ y $M_j = 0$ y $M_{j+1}^* = 0$, no hay necesidad de obtener una muestra de \underline{c}_{j+1}^* ya que $M_{j+1}^* = 0$.
- En la aplicación práctica de los algoritmos propuestos es muy importante considerar que el número de simulaciones necesario para obtener convergencia puede ser muy grande ya que la cadena necesita explorar un espacio de parámetros de de dimensión grande.

MCMC: Uniformidad ($M = 0$) de los tiempos de retorno

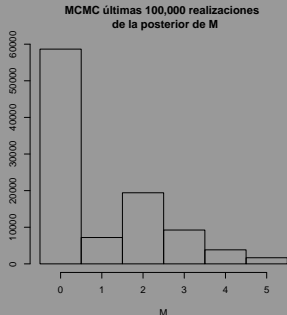


Figura: Histograma las realizaciones MCMC de M ($M = 0$ es una distribución uniforme) para la ocurrencia de los terremotos (Richter>6.4).

Bondad de ajuste χ^2

- El intervalo de tiempo se dividió en veinte subintervalos iguales, contabilizando el número de observaciones que se registraron en cada uno de ellos.
- Dichos registros fueron comparados con los valores esperados considerando una distribución exponencial con tasa estimada por el método de máxima verosimilitud.
- La prueba involucró un nivel de significancia del 5 % por lo cual el valor crítico comparable fue de 28.87. La estadística calculada es 21.23. Por lo tanto, no se rechaza la hipótesis nula de un proceso de Poisson homogéneo.

Estimación por regiones

Las distribuciones exponenciales con tasa constante, ajustadas para cada región, utilizan como parámetros los estimados mediante máxima verosimilitud, a partir de los registros de tiempos entre sismos en cada zona.

Región	$\hat{\lambda}$
Jalisco-Colima	0.1258
Michoacán	0.1247
Guerrero	0.3810
Oaxaca	0.5055
Chiapas	0.1719
Guatemala	0.1776

Cuadro: Parámetro estimado $\hat{\lambda}$ por región.

Bondad de ajuste χ^2 con datos segmentados

Región	Estadística χ^2
Jalisco-Colima	149.36
Michoacán	23.88
Guerrero	30.62
Oaxaca	19.45
Chiapas	71.64
Guatemala	39.60

Cuadro: Prueba χ^2 por región

Proceso Poisson homogéneo para las regiones de Michoacán y Oaxaca,

Poisson no homogéneo para el resto de las regiones donde la tasa de ocurrencia sea función de variables explicativas y valores rezagados de los periodos de ocurrencia.

Sismicidad como proceso de Poisson no homogéneo

Un proceso de Poisson no homogéneo se caracteriza por describirse a partir de una tasa de ocurrencia que varía en el tiempo y/o como función de variables explicativas \mathbf{x} , $\lambda(t; \mathbf{x})$. Para estimar la función de intensidad se recurrió al ajuste de modelos lineales generalizados: modelo log-lineal sobre el número de ocurrencias diarias.

Modelo log-lineal

- La matriz regresora se formó por vectores columna construidos a partir del vector de eventos o vector de respuesta $\Delta N(t)$.
- Variables explicativas básicas: tiempo en días desde el último sismo y su respectivo logaritmo, magnitud y profundidad del sismo anterior, así como latitud y longitud de los epicentros correspondientes al último sismo. Se ajustaron modelos para los registros sísmicos en los estados de Guerrero y Oaxaca.
- Estos modelos se obtuvieron mediante secuencias de iteraciones hacia atrás realizadas por la función step del programa R, la cual elimina una por una las covariables que no resultan significativas, así como el valor del Criterio de Información de Akaike obtenido.

La ecuación inicial está dada por

$$\log(\lambda(t_i; \mathbf{x})) = \log(E(Y_i))$$

$$= Cte + \alpha(t_i) + \beta(\log(t_i)) + \delta(m_{i-1}) + \varsigma(p_{i-1}) + \eta(long_{i-1}) + \theta(lat_{i-1}).$$

donde, Y_i representa el reporte diario de la ocurrencia o no ocurrencia de un sismo;

$\alpha, \beta, \delta, \varsigma, \eta$ y θ son los coeficientes de las variable explicativas:

- conteo, en días, desde la ocurrencia del último sismo,
- logaritmo natural de la variable ,
- magnitud correspondiente al sismo anterior,
- profundidad del hipocentro del sismo anterior,
- longitud registrada del epicentro del sismo anterior y
- latitud reportada del epicentro del sismo anterior.

El mejor modelo que describe las ocurrencias de los sismos en el estado de Guerrero es

$$\log(\lambda(t_i; x)_{Gro}) = -5.3513 - 0.2517 \log(t_i)$$

Para el estado de Oaxaca, la ocurrencia de sismos está descrita por

$$\log(\lambda(t_i; x)_{Gro}) = -7.128035 - 0.008805p_{i-1}$$

Siguiendo el modelo de tasas proporcionales se evaluaron las funciones de densidad y supervivencia de los tiempos entre eventos para cada región.

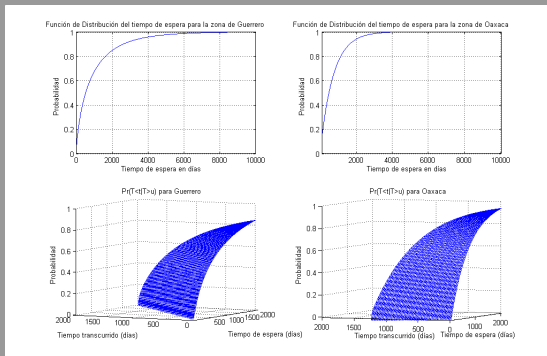
Modelos ajustados por región

$$\begin{aligned}
 H_0(t_j) &= \frac{t_j^{0.7483}}{0.7483} \\
 h_0(t_j) &= t_j^{-0.2517} \\
 f(t_j) &= t_j^{-0.2517} e^{-5.3513} \frac{t_j^{0.7483}}{0.7483} e^{-5.3513} \\
 S(t_j) &= e^{\frac{t_j^{0.7483}}{0.7483}} e^{-5.3513}
 \end{aligned}$$

Cuadro: Modelo ajustado para Guerrero

$$\begin{aligned}
 H_0(t_j) &= t_j \\
 h_0(t_j) &= 1 \\
 f(t_j) &= \lambda(t_j; \mathbf{x})_{Oax} e^{-t_j \lambda(t_j; \mathbf{x})_{Oax}} \\
 S(t_j) &= e^{-t_j \lambda(t_j; \mathbf{x})_{Oax}}
 \end{aligned}$$

Cuadro: Modelo ajustado para Oaxaca



La figura muestra las funciones de distribución, así como las probabilidades condicionales estimadas para las regiones de Guerrero y Oaxaca.

Resultados para la región de Guerrero

- la distribución de los periodos entre sismos dista de ser exponencial con tasa fija
- una distribución Weibull es la que mejor se ajusta para dicha variable, es decir, para la región de Guerrero un proceso de Poisson no homogéneo cuya tasa de ocurrencia es función del tiempo es el más adecuado.
- considerando el último sismo fuerte registrado en la región de Guerrero se tendría que el siguiente sismo ocurrirá, en promedio, dentro de 2.62 años desde la ocurrencia del último sismo.
- si se considerara un proceso de Poisson homogéneo para la región de Guerrero se estimaría que los sismos ocurren, en promedio, cada 2.44 años que es similar al valor de 2.62 años pronosticado por el proceso de Poisson no homogéneo y considerando los datos del último sismo.

Resultados para Oaxaca

- Se mostró y verificó la utilización de una distribución exponencial para describir los periodos de retorno entre sismos
- la tasa de ocurrencia de la distribución exponencial es función de la profundidad del sismo anterior; por lo tanto, proceso Poisson no homogéneo.
- La tasa de ocurrencias no homogénea fue de 1.96 años entre el último sismo del que se tiene registro y el próximo en ocurrir en la región de Oaxaca al considerar la profundidad del último sismo fuerte ocurrido en dicha zona.
- Si se ajusta un proceso de Poisson homogéneo en la región de Oaxaca se obtiene que en promedio transcurren 1.98 años entre las ocurrencias de sismos consecutivos.

Resultados

PERO

- Un analista que utilizara procesos de Poisson homogéneos para pronosticar el tiempo promedio para la ocurrencia del siguiente sismo en las regiones de Oaxaca y Guerrero cometería un error menor al 10 % en su estimación puntual al compararse con un analista que utilizara los procesos de Poisson no homogéneos ajustados.
- Por supuesto, para la región de Guerrero, la distribución Weibull y exponencial son diferentes en su comportamiento y, en particular, en el cálculo de intervalos de predicción se obtienen resultados diferentes.