Monto Total Reclamaciones

Carlos G. Pacheco
Con Gerardo Hernández del Valle (Columbia University).

- Suma Geométrica

$$S_M = \sum_{i=1}^{M} X_i, \quad M \sim Geo(p), X_i \sim G \tag{1}$$

$f(x) := P(S_M < x)$, Ecuación de renovación

$$f(x) = G(x)p + \int_0^x f(x-u)G(du). \tag{2}$$

e.g. $f(x) = x + \int_0^x (y-x)f(y)dy, \quad$ **Sol:** $f(x) = \sin(x)$.

Caminatas Aleatorias en Tiempo Cont.

- Sea X_i el monto del siniestro y
- τ_i el tiempo entre cada siniestro.

Número de siniestros al tiempo t

$$N_t = \max\left\{k : \sum_{i=1}^{k} \tau_i \leq t\right\}. \tag{3}$$

Monto Total de Reclamaciones al tiempo t

$$Z_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \; t \geq 0, \tag{4}$$

Ecuaciones de Volterra

Proposición. Sea $F(t,z) = P(Z_t \leq z)$, entonces

$$F(t,z) = P(\tau_1 > t) + \int_0^t \int_0^z F(u,w) f_X(z-w) f_\tau(t-u) dw du. \tag{5}$$

- Propiedades de regeneración,

Dado: $T = \tau_1 + ... + \tau_n$ y $z = \sum_{i=1}^n X_i$,

$$Z_{T+t} - z \stackrel{d}{=} Z_t, \; t \geq 0. \tag{6}$$

Primer tiempo de llegada

Primera vez que el proceso pasa un nivel

$$R_z = \inf\{s > 0 : \; Z_s > z\}.$$

Proposición. Sea $G(z,t) = P(R_z < t)$, entonces

$$G(z,t) = P(\tau_1 \leq t) P(X_1 > z) +$$

$$\int_0^t \int_0^z G(w,u) f_X(w) f_\tau(u) dw du, \tag{7}$$

Sumas descontadas

$$Z_t^{(\delta)} = \sum_{i=1}^{N_t} X_i e^{-\delta T_i}, \ t \geq 0, \tag{8}$$

donde $T_i = \sum_{j=1}^{i} \tau_j$.

Proposición. Sea $F_\delta(t,z) = P(Z_t^{(\delta)} \leq z)$, entonces

$$F_\delta(t,z) = P(\tau_1 > t) +$$

$$\int_0^t \int_0^{ze^{\delta u}} F_\delta(u,w) f_{X_1}(ze^{\delta(t-u)} - w) f_{\tau_1}(t-u) dw du. \tag{9}$$

La probabilidad de Ruina

Modelo Sparre-Andersen para una compañia de seguros

$$U_t = \eta + \int_0^t \rho s e^{-\delta s} ds - Z_t^{(\delta)}, t \geq 0, \tag{10}$$

Proposición. Sea $H_\delta(\eta) = P\left(\chi_\eta < \infty\right)$, donde

$$\chi_\eta = inf\left\{s : U_s < 0\right\}. \tag{11}$$

Entonces

$$H_\delta(\eta) = P(\eta + r(\tau_1) - X_1 e^{-\delta\tau_1} < 0) +$$

$$\int_0^\infty \int_0^{(\eta + r(u))e^{\delta\tau_1}} H_\delta(\eta + r(u) - we^{-\delta\tau_1}) f_{X_1}(w) f_{\tau_1}(u) dw du \tag{12}$$

Cálculos numéricos

Método basado en funciones escalonadas de dos dimensiones (SCILAB).

Tomemos $X_1 \sim exp(\mu)$ y $\tau_1 \sim exp(\lambda)$; $\lambda = 1$, $\mu = 1$

$$F(t,z) = e^{-\lambda t} + \int_0^t \int_0^z \lambda e^{-\lambda(t-u)} \mu e^{-\mu(z-w)} F(u,w) dw du, \quad (13)$$

$F(t,z)$

$t \backslash z$	0.1	0.5	0.7	1
0.1	0.913373	0.940521	0.950717	0.962831
0.5	0.635487	0.731907	0.770276	0.817963
0.7	0.529976	0.643721	0.690256	0.749334
1	0.403539	0.52919	0.582708	0.652746

Operadores Integrales

La ecuación integral es de la forma

$$(I - T)F = \phi. \tag{14}$$

F y ϕ en $C(\mathbb{R}^2)$;

$$T(F)(x, y) = \int_0^x \int_0^y K(x, y, u, v)F(u, v)dudv. \tag{15}$$

T es un operador compacto.

- Método numérico

$$(I - T_n)F_n = \phi_n. \tag{16}$$

FIN

Gracias!