# Kyosi Itô: Ganador del Primer Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas

Conferencia ITAM

Víctor Pérez-Abreu

CIMAT, Guanajuato

Marzo 30 del 2007

# Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas

- Creado recientemente por la Sociedad Matemática Alemana y la Unión Matemática Internacional.

# Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas

- Creado recientemente por la Sociedad Matemática Alemana y la Unión Matemática Internacional.
- Objetivo: Promover el hecho de que la matemática no es sólo pura, sino con impacto importante y profundo en casi todas las ciencias y en la tecnología, en los negocios y la vida diaria.

# Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas

- Creado recientemente por la Sociedad Matemática Alemana y la Unión Matemática Internacional.
- Objetivo: Promover el hecho de que la matemática no es sólo pura, sino con impacto importante y profundo en casi todas las ciencias y en la tecnología, en los negocios y la vida diaria.
- The prize is given, in particular, for the impact the work of the prize winner has had in practice.

# Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas

- Creado recientemente por la Sociedad Matemática Alemana y la Unión Matemática Internacional.
- Objetivo: Promover el hecho de que la matemática no es sólo pura, sino con impacto importante y profundo en casi todas las ciencias y en la tecnología, en los negocios y la vida diaria.
- The prize is given, in particular, for the impact the work of the prize winner has had in practice.
- Since the practical usefulness of mathematical results is often not immediate visible and since the applicability and importance for practice may only be realized after a long time lag, not age limit should restrict the choice of a prize winner.

# Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas

- Gauss Prize for applications of mathematics is to be awarded for outstanding:

# Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas

- Gauss Prize for applications of mathematics is to be awarded for outstanding:
  - Mathematical contributions that have found significant practical applications outside mathematics, or

# Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas

- Gauss Prize for applications of mathematics is to be awarded for outstanding:
  - Mathematical contributions that have found significant practical applications outside mathematics, or
  - Achievements that made the application of mathematical methods to areas outside of mathematics possible in an innovation way, via new modelling techniques or the design and implementation of algorithms.

# Premio Gauss por Aplicaciones Matemáticas

- Gauss Prize for applications of mathematics is to be awarded for outstanding:
  - Mathematical contributions that have found significant practical applications outside mathematics, or
  - Achievements that made the application of mathematical methods to areas outside of mathematics possible in an innovation way, via new modelling techniques or the design and implementation of algorithms.
- Primer ganador: Kyosi Itô, matemático japonés de 91 años, como reconocimiento a que el análisis estocástico que él fundó es actualmente una rica, importante y exitosa rama de las matemáticas, con un impacto formidable en "la tecnología, los negocios y la vida diaria de la gente".

# Algunas preguntas

- ¿Era Itô matemático aplicado?
- ¿Pensó Itô en aplicaciones cuando inventó el análisis estocástico?
- ¿Por qué inventó la integral estocástica y las ecuaciones diferenciales estocásticas?
- ¿Cuáles fueron las contribuciones de Itô?
- ¿Cuál es el impacto del trabajo de Itô?
- ¿Quién es Itô?
- ¿Cuál fue el entorno de Itô?

# Organización de la Conferencia

1. Entorno primeras décadas del Siglo XX
2. Notación medida-probabilidad
3. Los inicios del Análisis Estocástico
4. Desarrollo del Análisis Estocástico
5. Aplicaciones
6. Otras Contribuciones
7. Presencia de Itô en el mundo
8. Reconocimientos y Premios
9. Comentarios sobre la Obra de Kyosi Itô
10. Influencia personal

- 1900 Problema Seis de Hilbert: "necesidad de contar con una estructura axiomática para la probabilidad"

- 1900 Problema Seis de Hilbert: "necesidad de contar con una estructura axiomática para la probabilidad"
- 1909 Borel: Relación entre medida y probabilidad

- 1900 Problema Seis de Hilbert: "necesidad de contar con una estructura axiomática para la probabilidad"
- 1909 Borel: Relación entre medida y probabilidad
- 1900-1930 Lebesgue, Lévy, Poincaré, Fréchet, Steinhaus, Ulam, Hadamard, Lominick, Wiener, Bohlman, Haussdorff, von Mises, Polya, Cantelli, Glivenko, de Feneti, Khinchine, Bernstein, Slutsky.

- 1900 Problema Seis de Hilbert: "necesidad de contar con una estructura axiomática para la probabilidad"
- 1909 Borel: Relación entre medida y probabilidad
- 1900-1930 Lebesgue, Lévy, Poincaré, Fréchet, Steinhaus, Ulam, Hadamard, Lominick, Wiener, Bohlman, Haussdorff, von Mises, Polya, Cantelli, Glivenko, de Feneti, Khinchine, Bernstein, Slutsky.
- 1902-1930 Desarrollo de teoría de medida en espacios abstractos. Nikodym, Caratheodory, Fréchet.

- 1900 Problema Seis de Hilbert: "necesidad de contar con una estructura axiomática para la probabilidad"
- 1909 Borel: Relación entre medida y probabilidad
- 1900-1930 Lebesgue, Lévy, Poincaré, Fréchet, Steinhaus, Ulam, Hadamard, Lominick, Wiener, Bohlman, Haussdorff, von Mises, Polya, Cantelli, Glivenko, de Feneti, Khinchine, Bernstein, Slutsky.
- 1902-1930 Desarrollo de teoría de medida en espacios abstractos. Nikodym, Caratheodory, Fréchet.
- 1933 Andrei Kolmogorov**:** axiomas de probabilidad

- 1900 Necesidad de modelo matemático para *Movimiento caótico de partículas de polen en el agua, causado por el choque con las moléculas vecinas.*

- 1900 Necesidad de modelo matemático para *Movimiento caótico de partículas de polen en el agua, causado por el choque con las moléculas vecinas.*

- 1900 Bachelier: Movimiento Browniano para modelar fluctuaciones de precios de acciones en bolsa de valores de París. Ecuación de calor.

- 1900 Necesidad de modelo matemático para *Movimiento caótico de partículas de polen en el agua, causado por el choque con las moléculas vecinas.*
- 1900 Bachelier: Movimiento Browniano para modelar fluctuaciones de precios de acciones en bolsa de valores de París. Ecuación de calor.
- 2005 Año Internacional de la Física: Celebrar 100 años del trabajo de Einstein sobre relatividad especial, *movimiento Browniano* y efecto fotoeléctrico.

- 1900 Necesidad de modelo matemático para *Movimiento caótico de partículas de polen en el agua, causado por el choque con las moléculas vecinas.*

- 1900 Bachelier: Movimiento Browniano para modelar fluctuaciones de precios de acciones en bolsa de valores de París. Ecuación de calor.

- 2005 Año Internacional de la Física: Celebrar 100 años del trabajo de Einstein sobre relatividad especial, *movimiento Browniano* y efecto fotoeléctrico.

- 1908 Langevin: Primera ecuación diferencial estocástica.

- 1900 Necesidad de modelo matemático para *Movimiento caótico de partículas de polen en el agua, causado por el choque con las moléculas vecinas.*

- 1900 Bachelier: Movimiento Browniano para modelar fluctuaciones de precios de acciones en bolsa de valores de París. Ecuación de calor.

- 2005 Año Internacional de la Física: Celebrar 100 años del trabajo de Einstein sobre relatividad especial, *movimiento Browniano* y efecto fotoeléctrico.

- 1908 Langevin: Primera ecuación diferencial estocástica.

- 1920-1930 Wiener: Estudio riguroso de movimiento Browniano (análisis funcional).

- 1930-1950 Lévy: estudio de movimiento Browniano, Procesos de Lévy (incrementos independientes y estacionarios), límites de sumas de variables aleatorias independientes, distribuciones infinitamente divisibles, trayectorias de procesos, martingalas.

- 1930-1950 Lévy: estudio de movimiento Browniano, Procesos de Lévy (incrementos independientes y estacionarios), límites de sumas de variables aleatorias independientes, distribuciones infinitamente divisibles, trayectorias de procesos, martingalas.
- 1930-1950 Doob: Martingalas, desigualdades, propiedades de regularización de procesos

- 1930-1950 Lévy: estudio de movimiento Browniano, Procesos de Lévy (incrementos independientes y estacionarios), límites de sumas de variables aleatorias independientes, distribuciones infinitamente divisibles, trayectorias de procesos, martingalas.
- 1930-1950 Doob: Martingalas, desigualdades, propiedades de regularización de procesos
- 1930´s Kolmogorov, Feller: Métodos analíticos en Probabilidad (Procesos de Markov, semigrupos de operadores, generadores infinitesimales)

- 1930-1950 Lévy: estudio de movimiento Browniano, Procesos de Lévy (incrementos independientes y estacionarios), límites de sumas de variables aleatorias independientes, distribuciones infinitamente divisibles, trayectorias de procesos, martingalas.
- 1930-1950 Doob: Martingalas, desigualdades, propiedades de regularización de procesos
- 1930´s Kolmogorov, Feller: Métodos analíticos en Probabilidad (Procesos de Markov, semigrupos de operadores, generadores infinitesimales)
- 1933 Kolmogorov: Construcción de Procesos Estocásticos (consistencia de distribuciones finito dimensionales).

# Kyosi Itô comienza su carrera

- 1915: Septiembre 7, Nace Kyosi Itô en Japón

# Kyosi Itô comienza su carrera

- 1915: Septiembre 7, Nace Kyosi Itô en Japón
- 1938: Gradúa de Matemáticas, Universidad Imperial de Tokio (**interés en probabilidad**)

# Kyosi Itô comienza su carrera

- 1915: Septiembre 7, Nace Kyosi Itô en Japón
- 1938: Gradúa de Matemáticas, Universidad Imperial de Tokio (**interés en probabilidad**)
- 1939-1943: Trabaja "en el INEGI" de Japón

# Kyosi Itô comienza su carrera

- 1915: Septiembre 7, Nace Kyosi Itô en Japón
- 1938: Gradúa de Matemáticas, Universidad Imperial de Tokio (**interés en probabilidad**)
- 1939-1943: Trabaja "en el INEGI" de Japón
  - Entender trabajos de Kolmogorov, Lévy, Doob

# Kyosi Itô comienza su carrera

- 1915: Septiembre 7, Nace Kyosi Itô en Japón
- 1938: Gradúa de Matemáticas, Universidad Imperial de Tokio (**interés en probabilidad**)
- 1939-1943: Trabaja "en el INEGI" de Japón
  - Entender trabajos de Kolmogorov, Lévy, Doob
  - 1940: Distribuciones de probabilidad en grupos compactos

# Kyosi Itô comienza su carrera

- 1915: Septiembre 7, Nace Kyosi Itô en Japón
- 1938: Gradúa de Matemáticas, Universidad Imperial de Tokio (**interés en probabilidad**)
- 1939-1943: Trabaja "en el INEGI" de Japón
  - Entender trabajos de Kolmogorov, Lévy, Doob
  - 1940: Distribuciones de probabilidad en grupos compactos
  - **1942: Integral estocástica**

# Kyosi Itô comienza su carrera

- 1915: Septiembre 7, Nace Kyosi Itô en Japón
- 1938: Gradúa de Matemáticas, Universidad Imperial de Tokio (**interés en probabilidad**)
- 1939-1943: Trabaja "en el INEGI" de Japón
  - Entender trabajos de Kolmogorov, Lévy, Doob
  - 1940: Distribuciones de probabilidad en grupos compactos
  - **1942: Integral estocástica**
- 1943-1952: Profesor Asistente Universidad de Nagoya

# Kyosi Itô comienza su carrera

- 1915: Septiembre 7, Nace Kyosi Itô en Japón
- 1938: Gradúa de Matemáticas, Universidad Imperial de Tokio (**interés en probabilidad**)
- 1939-1943: Trabaja "en el INEGI" de Japón
    - Entender trabajos de Kolmogorov, Lévy, Doob
    - 1940: Distribuciones de probabilidad en grupos compactos
    - **1942: Integral estocástica**
- 1943-1952: Profesor Asistente Universidad de Nagoya
- 1943-1945: Matemáticas y probabilidad: Ergodicidad de procesos estocásticos, Teoría de turbulencia, aplicaciones de espacios de Hilbert en probabilidad, Prueba $t$-student en estadística

# Kyosi Itô comienza su carrera

- 1915: Septiembre 7, Nace Kyosi Itô en Japón
- 1938: Gradúa de Matemáticas, Universidad Imperial de Tokio (**interés en probabilidad**)
- 1939-1943: Trabaja "en el INEGI" de Japón
  - Entender trabajos de Kolmogorov, Lévy, Doob
  - 1940: Distribuciones de probabilidad en grupos compactos
  - **1942: Integral estocástica**
- 1943-1952: Profesor Asistente Universidad de Nagoya
- 1943-1945: Matemáticas y probabilidad: Ergodicidad de procesos estocásticos, Teoría de turbulencia, aplicaciones de espacios de Hilbert en probabilidad, Prueba $t$-student en estadística
- 1945: Itô obtiene su doctorado

- 1945-1951: **Análisis Estocástico**:

# Kyosi Itô continua su carrera

- 1945-1951: **Análisis Estocástico**:
    - 1946: Ecuación integral estocástica

# Kyosi Itô continua su carrera

- 1945-1951: **Análisis Estocástico**:
  - 1946: Ecuación integral estocástica
  - 1948: Integral estocástica

# Kyosi Itô continua su carrera

- 1945-1951: **Análisis Estocástico**:
  - 1946: Ecuación integral estocástica
  - 1948: Integral estocástica
  - 1950: Ecuaciones diferenciales estocásticas en variedades diferenciales

# Kyosi Itô continua su carrera

- 1945-1951: **Análisis Estocástico**:
    - 1946: Ecuación integral estocástica
    - 1948: Integral estocástica
    - 1950: Ecuaciones diferenciales estocásticas en variedades diferenciales
    - 1950: Movimiento Browniano en grupos de Lie.

# Kyosi Itô continua su carrera

- 1945-1951: **Análisis Estocástico**:
  - 1946: Ecuación integral estocástica
  - 1948: Integral estocástica
  - 1950: Ecuaciones diferenciales estocásticas en variedades diferenciales
  - 1950: Movimiento Browniano en grupos de Lie.
  - 1951: Ecuaciones diferenciales estocásticas

- 1945-1951: **Análisis Estocástico**:
  - 1946: Ecuación integral estocástica
  - 1948: Integral estocástica
  - 1950: Ecuaciones diferenciales estocásticas en variedades diferenciales
  - 1950: Movimiento Browniano en grupos de Lie.
  - 1951: Ecuaciones diferenciales estocásticas
- 1952-1979: Profesor de Matemáticas de la Universidad de Kyoto

# Kyosi Itô continua su carrera

- 1945-1951: **Análisis Estocástico**:
  - 1946: Ecuación integral estocástica
  - 1948: Integral estocástica
  - 1950: Ecuaciones diferenciales estocásticas en variedades diferenciales
  - 1950: Movimiento Browniano en grupos de Lie.
  - 1951: Ecuaciones diferenciales estocásticas
- 1952-1979: Profesor de Matemáticas de la Universidad de Kyoto
- 1979-1985: Profesor de la Universidad Gakushin

- $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *Espacio de Probabilidad*
- *Variable aleatoria* (v.a.) $X$ con distribución $F$ :
  1. $X : \Omega \to \mathbf{R}$ es $\mathcal{A}$-medible
  2. $F(x) = P(X \leq x)$
- $\mathcal{L}(X) = F$: *Ley (distribución)* de $X$ es $F$
- $F$ no $\downarrow$, continua por derecha, límite por izquierda, $F(-\infty) = 0, F(\infty) = 1$.
- *Distribución Gaussiana*: $F \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{1}{2\sigma^2}(t-\mu)^2)dt$$

# Notación (TQSP)

## Kolmogorov: probabilidad básica

- *Valor esperado* $E(g(X))$,
  - $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(X) \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$E(g(X)) = \int_\Omega g(X(\omega))P(d\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x)F(dx)$$

- $X_1, X_2 \ldots, X_n$ *v. a.* **independientes** *(v.a.i.)*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} \{X_i \leq x_i\}) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i)$$

- Si $X_1, X_2 \ldots, X_n$ *v. a. i.*, $g_i(X_i) \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$

$$E(\prod_{i=1}^{n} g_i(X_i)) = \prod_{i=1}^{n} E(g_i(X_i))$$

- $X, Y$ independientes, $X \perp Y$. $E(X) = E(Y) = 0$

$$E(XY) = 0$$

# Notación (TQSP)
## Esperanza condicional y martingalas

- Esperanza condicional $E(X|\mathcal{G})$
  - $X \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$
  - $\mathcal{G}$ es $\sigma$-álgebra, $\mathcal{G} \subset \mathcal{A}$
  - $E(X|\mathcal{G})$ es $\mathcal{G}$-medible

$$\int_A E(X|\mathcal{G})dP = \int_A XdP, \quad \forall A \in \mathcal{G}$$

- *Lo que esperamos de* $X$ con la información $\mathcal{G}$
- $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ *filtración de* $\sigma$-álgebras:

$$\mathcal{G}_s \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{A}, \quad s < t$$

- $(X_t, \mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$, martingala si

$$E(X_t|\mathcal{G}_s) = X_s, \quad s < t$$

# Movimiento Browniano

- $(B_t)_{t\geq 0}$ v. a. $P(B_0 = 0) = 1$

# Movimiento Browniano

- $(B_t)_{t\geq 0}$ v. a. $P(B_0 = 0) = 1$
  - Incrementos independientes: $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$

$$B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0} \text{ son v.a.independientes}$$

# Movimiento Browniano

- $(B_t)_{t\geq 0}$ v. a. $P(B_0 = 0) = 1$
  - Incrementos independientes: $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$

$$B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0} \text{ son v.a.independientes}$$

  - Incrementos estacionarios: $s < t$, $\mathcal{L}(B_t - B_s) = N(0, t-s)$.

$$\Big(E(B_t) = 0, E(B_t^2) = t\Big)$$

# Movimiento Browniano

- $(B_t)_{t\geq 0}$ v. a. $P(B_0 = 0) = 1$
  - Incrementos independientes: $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$

$$B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0} \text{ son v.a.independientes}$$

  - Incrementos estacionarios: $s < t$, $\mathcal{L}(B_t - B_s) = N(0, t-s)$.

$$\Big(E(B_t) = 0, E(B_t^2) = t\Big)$$

- Continuidad de trayectorias (Proceso de Wiener):

$$P(B_t(\omega) \text{ es continua en } t) = 1$$

# Movimiento Browniano

- $(B_t)_{t \geq 0}$ v. a. $P(B_0 = 0) = 1$
  - Incrementos independientes: $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$

$$B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0} \text{ son v.a.independientes}$$

  - Incrementos estacionarios: $s < t$, $\mathcal{L}(B_t - B_s) = N(0, t - s)$.

$$\left( E(B_t) = 0, E(B_t^2) = t \right)$$

- Continuidad de trayectorias (Proceso de Wiener):

$$P(B_t(\omega) \text{ es continua en } t) = 1$$

- Irregularidad de trayectorias:

$$P(B_t(\omega) \text{ es derivable en ningún lado}) = 1$$

# Movimiento Browniano

- $(B_t)_{t\geq 0}$ v. a. $P(B_0 = 0) = 1$
  - Incrementos independientes: $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$

    $$B_{t_k} - B_{t_{k-1}}, \cdots, B_{t_1} - B_{t_0} \text{ son v.a.independientes}$$

  - Incrementos estacionarios: $s < t$, $\mathcal{L}(B_t - B_s) = N(0, t-s)$.

    $$\Big(E(B_t) = 0, E(B_t^2) = t\Big)$$

- Continuidad de trayectorias (Proceso de Wiener):

  $$P(B_t(\omega) \text{ es continua en } t) = 1$$

- Irregularidad de trayectorias:

  $$P(B_t(\omega) \text{ es derivable en ningún lado}) = 1$$

- Paul Lévy: $(B_t, \mathcal{G}_t^B)_{t\geq 0}$ es martingala;

  $$\mathcal{G}_t^B = \sigma(B_s, s \leq t).$$

$T = [0,1]$, $f \in L^2(T)$ **no aleatoria.**

- $f$ simple, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, $a_i \in \mathbf{R}$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t)$$

$T = [0,1]$, $f \in L^2(T)$ **no aleatoria.**

- $f$ simple, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, $a_i \in \mathbf{R}$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{(t_{i-1},t_i]}(t)$$

- $$I(f) = \int_T f(t)dBt = \sum_{i=1}^{n} a_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

$T = [0,1]$, $f \in L^2(T)$ **no aleatoria.**

- $f$ simple, $0 \le t_0 \le t_1 \le \cdots \le t_k$, $a_i \in \mathbf{R}$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{(t_{i-1},t_i]}(t)$$

- $$I(f) = \int_T f(t)dBt = \sum_{i=1}^{n} a_i(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

- Por incrementos independientes (ortogonalidad) y $E(B_t^2) = t$

$$E(I(f))^2 = E\left(\int_T f(t)dBt\right)^2 = \int_T f^2(t)dt$$

$T = [0,1]$, $f \in L^2(T)$ **no aleatoria.**

- $f$ simple, $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_k$, $a_i \in \mathbf{R}$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{(t_{i-1}, t_i]}(t)$$

- $$I(f) = \int_T f(t) dBt = \sum_{i=1}^{n} a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

- Por incrementos independientes (ortogonalidad) y $E(B_t^2) = t$

$$E(I(f))^2 = E\left(\int_T f(t) dBt\right)^2 = \int_T f^2(t) dt$$

- Extender isometría $I(f)$

- $f = f(\omega, t)$ **es aleatoria**
  - $f \in L^2(\Omega \times T)$ (medible)

- $f = f(\omega, t)$ **es aleatoria**
  - $f \in L^2(\Omega \times T)$ (medible)
  - $f$ **adaptado** *a* $\mathcal{G}^B$: $\forall t \geq 0$ $f(\cdot, t)$ es $\mathcal{G}^B_t$-medible

- $f = f(\omega, t)$ **es aleatoria**
  - $f \in L^2(\Omega \times T)$ (medible)
  - $f$ **adaptado** $a\ \mathcal{G}^B$: $\forall t \geq 0\ f(\cdot, t)$ es $\mathcal{G}_t^B$-medible

- Ejemplos:

- $f = f(\omega, t)$ **es aleatoria**
  - $f \in L^2(\Omega \times T)$ (medible)
  - $f$ **adaptado** *a* $\mathcal{G}^B$: $\forall t \geq 0$ $f(\cdot, t)$ es $\mathcal{G}_t^B$-medible
- Ejemplos:
  - $f(\omega, t) = B_t^p(\omega)$ es adaptado

- $f = f(\omega, t)$ **es aleatoria**
  - $f \in L^2(\Omega \times T)$ (medible)
  - $f$ **adaptado** a $\mathcal{G}^B$: $\forall t \geq 0$ $f(\cdot, t)$ es $\mathcal{G}_t^B$-medible

- Ejemplos:
  - $f(\omega, t) = B_t^p(\omega)$ es adaptado
  - $f(\omega, t) = B_{t+\epsilon}^p(\omega), \epsilon > 0$, no es adaptado, se anticipa

- $f = f(\omega, t)$ **es aleatoria**
  - $f \in L^2(\Omega \times T)$ (medible)
  - $f$ **adaptado** a $\mathcal{G}^B$: $\forall t \geq 0$ $f(\cdot, t)$ es $\mathcal{G}_t^B$-medible

- Ejemplos:
  - $f(\omega, t) = B_t^p(\omega)$ es adaptado
  - $f(\omega, t) = B_{t+\epsilon}^p(\omega), \epsilon > 0$, no es adaptado, se anticipa

- $f$ *simple adaptado*, $t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n$, $a_i(\omega)$ $\mathcal{G}_{t_i-1}^B$-medibles

$$f(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i 1_{[t_{i-1}, t_i)}(t)$$

$$I(f) = \int_T f(t) dBt = \sum_{i=1}^{n} a_i (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

- $$E\left(\int_T f(t)dBt\right)^2 = E\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right)^2$$

$$= \quad 2\sum_{i<j}^{n} E\left(a_i a_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) + \sum_{i=1}^{n} E\left(a_i^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right)$$

$$E\left(a_i a_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) = 0$$

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right) = E\int_T f^2(t)dt$$

$$E\left(I(f)\right)^2 = E\int_T f^2(t)dt$$

- $$E\left(\int_T f(t)dBt\right)^2 = E\left(\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right)^2$$

  $$= \quad 2\sum_{i<j}^{n} E\left(a_i a_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) + \sum_{i=1}^{n} E\left(a_i^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right)$$

  $$E\left(a_i a_j (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})\right) = 0$$

  $$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right) = E\int_T f^2(t)dt$$

  $$E\left(I(f)\right)^2 = E\int_T f^2(t)dt$$

- Extender isometría $I(f)$

# Propiedades Integral Estocástica

$$X_t = \int_0^t f(s,\cdot)\, dB_s$$

- $(X_t, \mathcal{G}_t^B)_{t \geq 0}$ es *martingala continua*

# Propiedades Integral Estocástica

$$X_t = \int_0^t f(s,\cdot)\,dB_s$$

- $(X_t, \mathcal{G}_t^B)_{t\geq 0}$ es *martingala continua*
- $< X >_t = \int\limits_0^t f^2(s,\cdot)ds$ juega el papel de $< B >_t = t$.

# Propiedades Integral Estocástica

$$X_t = \int_0^t f(s,\cdot)dB_s$$

- $(X_t, \mathcal{G}_t^B)_{t\geq 0}$ es *martingala continua*
- $< X >_t = \int\limits_0^t f^2(s,\cdot)ds$ juega el papel de $< B >_t = t$.
- $\exists$ otro movimiento Browniano $\widetilde{B}_t$ tal que $X_t = \widetilde{B}_{\langle X \rangle_t}$

# Propiedades Integral Estocástica

$$X_t = \int_0^t f(s,\cdot)dB_s$$

- $(X_t, \mathcal{G}_t^B)_{t\geq 0}$ es *martingala continua*
- $< X >_t = \int\limits_0^t f^2(s,\cdot)ds$ juega el papel de $< B >_t = t$.
- $\exists$ otro movimiento Browniano $\widetilde{B}_t$ tal que $X_t = \widetilde{B}_{\langle X \rangle_t}$
- **Fórmula de Itô**: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase $C^2$

$$g(X_t) = g(0) + \int_0^t g'(X_s)f(s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(X_s)f^2(s)ds$$

# Ejemplo fórmula de Itô

- $g(x) = x^2$, $f(s,\omega) \equiv 1$, $X_t = B_t$

$$B_t = \int_0^t dB_s$$

# Ejemplo fórmula de Itô

- $g(x) = x^2$, $f(s,\omega) \equiv 1$, $X_t = B_t$

$$B_t = \int_0^t dB_s$$

- Aplicando fórmula de Itô

$$g(X_t) = g(0) + \int_0^t g'(X_s) f(s) dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t g''(X_s) f^2(s) ds$$

$$B_t^2 = 2 \int_0^t B_s dB_s + \int_0^t ds$$

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

# Ejemplo fórmula de Itô

- $g(x) = x^2$, $f(s,\omega) \equiv 1$, $X_t = B_t$

$$B_t = \int_0^t dB_s$$

- Aplicando fórmula de Itô

$$g(X_t) = g(0) + \int_0^t g'(X_s) f(s) dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t g''(X_s) f^2(s) ds$$

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s dB_s + \int_0^t ds$$

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$$

- En general

$$\int_0^1 \int_0^{s_{n-1}} \cdots \int_0^{s_2} dB_{s_1} \cdots dB_{s_n} = H_n(B_1)$$

# Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE)

- Notación

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)dB_t$$

# Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE)

- Notación

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)dB_t$$

- Existe proceso $X_t$ adaptado a un mB:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X)ds + \int_0^t b(s, X)dB_s$$

# Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE)

- Notación

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)dB_t$$

- Existe proceso $X_t$ adaptado a un mB:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X)ds + \int_0^t b(s, X)dB_s$$

- Tipo Markoviano

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

# Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE)

- Notación
$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)dB_t$$
- Existe proceso $X_t$ adaptado a un mB:
$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X)ds + \int_0^t b(s, X)dB_s$$
- Tipo Markoviano
$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$
- Sistema dinámico $b \equiv 0$: $dX_t = a(t, X_t)dt$

# Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (EDE)

- Notación

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)dB_t$$

- Existe proceso $X_t$ adaptado a un mB:

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X)ds + \int_0^t b(s, X)dB_s$$

- Tipo Markoviano

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

- Sistema dinámico $b \equiv 0$: $dX_t = a(t, X_t)dt$
- **Impacto**: EDE son modelos matemáticos que consideran conjuntamente tanto **aspectos aleatorios** como **determinísticos**

# NO ES SUMA DE ALEATORIO, SINO ESTRUCTURA

- Señal más ruido:

$$X_t = h_t + B_t$$

# NO ES SUMA DE ALEATORIO, SINO ESTRUCTURA

- Señal más ruido:

$$X_t = h_t + B_t$$

- Para hacer sentido: $\mu_X << \mu_B$ si y sólo si:

$$h_t = \int_0^t h'_s ds$$

# NO ES SUMA DE ALEATORIO, SINO ESTRUCTURA

- Señal más ruido:
$$X_t = h_t + B_t$$
- Para hacer sentido: $\mu_X << \mu_B$ si y sólo si:
$$h_t = \int_0^t h'_s ds$$
- $$X_t = \int_0^t h'_s ds + \int_0^t dB_s$$

# NO ES SUMA DE ALEATORIO, SINO ESTRUCTURA

- Señal más ruido:

$$X_t = h_t + B_t$$

- Para hacer sentido: $\mu_X << \mu_B$ si y sólo si:

$$h_t = \int_0^t h'_s ds$$

-

$$X_t = \int_0^t h'_s ds + \int_0^t dB_s$$

- ¡¡Una EDF de Itô!!

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

- Probabilidades de transición

$$p(s, x; t, \Gamma) = P(X_t \in \Gamma | X_s = x)$$

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

- Probabilidades de transición

$$p(s, x; t, \Gamma) = P(X_t \in \Gamma | X_s = x)$$

- Ecuación de Kolmogorov: $(p = p(s, x; t, y))$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a(s, x)\frac{\partial}{x}p + \frac{1}{2}b^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p$$

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

- Probabilidades de transición

$$p(s, x; t, \Gamma) = P(X_t \in \Gamma | X_s = x)$$

- Ecuación de Kolmogorov: $(p = p(s, x; t, y))$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a(s, x)\frac{\partial}{x}p + \frac{1}{2}b^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p$$

- Ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t}[a(s, x)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b^2(s, x)p]$$

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

- Probabilidades de transición

$$p(s, x; t, \Gamma) = P(X_t \in \Gamma | X_s = x)$$

- Ecuación de Kolmogorov: $(p = p(s, x; t, y))$

$$-\frac{\partial p}{\partial s} = a(s, x)\frac{\partial}{x}p + \frac{1}{2}b^2(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}p$$

- Ecuación de Fokker-Planck

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial t}[a(s, x)p] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[b^2(s, x)p]$$

- **Impacto**: Conexión: Procesos de Markov↔Semigrupos de operadores y sus generadores infinitesimales↔EDE

$$X_t = X_s + \int_s^t a(u, X_u)du + \int_s^t b(u, X_u)dB_u$$

- Kolmogorov:

$$T_s^t f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)p(s, x; t, y)dy$$

$$X_t = X_s + \int_s^t a(u, X_u)du + \int_s^t b(u, X_u)dB_u$$

- Kolmogorov:

$$T_s^t f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)p(s, x; t, y)dy$$

- Itô:

$$T_s^t f(x) = E\left[ f(X_t) \middle| X_s = x \right]$$

# Procesos de Markov y Semigrupos

$$X_t = X_s + \int_s^t a(u, X_u)du + \int_s^t b(u, X_u)dB_u$$

- Kolmogorov:

$$T_s^t f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)p(s, x; t, y)dy$$

- Itô:

$$T_s^t f(x) = E\left[ f(X_t) \middle| X_s = x \right]$$

- Generador infinitesimal: $f \in C_b^2$

$$A_s f(x) = \frac{1}{2} a(s, x) f''(x) + b(s, x) f'(x)$$

$$X_t = X_s + \int_s^t a(u, X_u)du + \int_s^t b(u, X_u)dB_u$$

- Kolmogorov:

$$T_s^t f(x) = \int_{\mathbf{R}} f(y)p(s, x; t, y)dy$$

- Itô:

$$T_s^t f(x) = E\left[ f(X_t) \middle| X_s = x \right]$$

- Generador infinitesimal: $f \in C_b^2$

$$A_s f(x) = \frac{1}{2}a(s, x)f''(x) + b(s, x)f'(x)$$

- Stroock-**Varadhan**: El Problema de la Martingala

# Ejemplos

- **Ecuación de Langevin**

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta dB_t$$

Solución: **Proceso de Ornstein-Uhlenbeck**

$$X_t = e^{\alpha t} X_0 + \beta \int_0^t e^{-\alpha(s-t)} dB_t$$

# Ejemplos

- **Ecuación de Langevin**

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta dB_t$$

Solución: **Proceso de Ornstein-Uhlenbeck**

$$X_t = e^{\alpha t} X_0 + \beta \int_0^t e^{-\alpha(s-t)} dB_t$$

- **Exponencial estocástica**: $dX_t = X_t dB_t$, $X_0 = 1$

$$X_t = \exp\{B_t - \frac{1}{2}t\}$$

# Ejemplos

- **Ecuación de Langevin**

$$dX_t = \alpha X_t dt + \beta dB_t$$

Solución: **Proceso de Ornstein-Uhlenbeck**

$$X_t = e^{\alpha t} X_0 + \beta \int_0^t e^{-\alpha(s-t)} dB_t$$

- **Exponencial estocástica**: $dX_t = X_t dB_t$, $X_0 = 1$

$$X_t = \exp\{B_t - \frac{1}{2}t\}$$

- **Fórmula de Black-Sholes**

$$dX_t = X_t d\widetilde{B}_t$$

$$\widetilde{B}_t = (\mu + \frac{\sigma^2}{2})t + B_t$$

Solución:

$$X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma B_t)$$

# Análisis Estocástico 1950-2000: Desarrollo

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)d\mathbf{Z}_t$$

- Integral estocástica, filtración, $< Z >_t$, fórmula de Itô, EDE, exponencial estocástica, fórmula de Girsanov, etc.

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)d\mathbf{Z}_t$$

- Integral estocástica, filtración, $< Z >_t$, fórmula de Itô, EDE, exponencial estocástica, fórmula de Girsanov, etc.
- Procesos integradores $Z_t$ (incluye procesos de Lévy):

# Análisis Estocástico 1950-2000: Desarrollo

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)d\mathbf{Z}_t$$

- Integral estocástica, filtración, $< Z >_t$, fórmula de Itô, EDE, exponencial estocástica, fórmula de Girsanov, etc.
- Procesos integradores $Z_t$ (incluye procesos de Lévy):
  - martingalas, martingalas locales, quasimartingalas, supermartingalas

# Análisis Estocástico 1950-2000: Desarrollo

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)d\mathbf{Z}_t$$

- Integral estocástica, filtración, $< Z >_t$, fórmula de Itô, EDE, exponencial estocástica, fórmula de Girsanov, etc.
- Procesos integradores $Z_t$ (incluye procesos de Lévy):
  - martingalas, martingalas locales, quasimartingalas, supermartingalas
  - semimartingalas

# Análisis Estocástico 1950-2000: Desarrollo

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)d\mathbf{Z}_t$$

- Integral estocástica, filtración, $< Z >_t$, fórmula de Itô, EDE, exponencial estocástica, fórmula de Girsanov, etc.
- Procesos integradores $Z_t$ (incluye procesos de Lévy):
  - martingalas, martingalas locales, quasimartingalas, supermartingalas
  - semimartingalas
- **Semimartingalas**: procesos más generales respecto a los cuales se puede integrar en sentido de Itô.

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)d\mathbf{Z}_t$$

- Integral estocástica, filtración, $< Z >_t$, fórmula de Itô, EDE, exponencial estocástica, fórmula de Girsanov, etc.
- Procesos integradores $Z_t$ (incluye procesos de Lévy):
  - martingalas, martingalas locales, quasimartingalas, supermartingalas
  - semimartingalas
- **Semimartingalas**: procesos más generales respecto a los cuales se puede integrar en sentido de Itô.
- Escuela francesa de probabilidad.

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)d\mathbf{Z}_t$$

- Integral estocástica, filtración, $< Z >_t$, fórmula de Itô, EDE, exponencial estocástica, fórmula de Girsanov, etc.
- Procesos integradores $Z_t$ (incluye procesos de Lévy):
  - martingalas, martingalas locales, quasimartingalas, supermartingalas
  - semimartingalas
- **Semimartingalas**: procesos más generales respecto a los cuales se puede integrar en sentido de Itô.
- Escuela francesa de probabilidad.
- Análisis estocástico en espacios de dimensión infinita.

# Análisis Estocástico 1950-2000: Desarrollo

$$dX_t = a(t, X)dt + b(t, X)d\mathbf{Z}_t$$

- Integral estocástica, filtración, $< Z >_t$, fórmula de Itô, EDE, exponencial estocástica, fórmula de Girsanov, etc.
- Procesos integradores $Z_t$ (incluye procesos de Lévy):
  - martingalas, martingalas locales, quasimartingalas, supermartingalas
  - semimartingalas
- **Semimartingalas**: procesos más generales respecto a los cuales se puede integrar en sentido de Itô.
- Escuela francesa de probabilidad.
- Análisis estocástico en espacios de dimensión infinita.
- Integral **anticipativa** vs Integral de Itô

- Matemáticas: Ecuaciones dif. parciales, teoría de potencial, análisis armónico, geometría diferencial.

# Análisis Estocástico 1950-2000: Aplicaciones

- Matemáticas: Ecuaciones dif. parciales, teoría de potencial, análisis armónico, geometría diferencial.
- Diversas áreas:

# Análisis Estocástico 1950-2000: Aplicaciones

- Matemáticas: Ecuaciones dif. parciales, teoría de potencial, análisis armónico, geometría diferencial.
- Diversas áreas:
  - **Física:** turbulencia, teoría del campo.

# Análisis Estocástico 1950-2000: Aplicaciones

- Matemáticas: Ecuaciones dif. parciales, teoría de potencial, análisis armónico, geometría diferencial.
- Diversas áreas:
  - **Física:** turbulencia, teoría del campo.
  - **Ingeniería:** filtros, teoría de control, estabilidad, **sísmica.**

# Análisis Estocástico 1950-2000: Aplicaciones

- Matemáticas: Ecuaciones dif. parciales, teoría de potencial, análisis armónico, geometría diferencial.
- Diversas áreas:
  - **Física:** turbulencia, teoría del campo.
  - **Ingeniería:** filtros, teoría de control, estabilidad, **sísmica.**
  - **Biología:** dinámica de poblaciones

# Análisis Estocástico 1950-2000: Aplicaciones

- Matemáticas: Ecuaciones dif. parciales, teoría de potencial, análisis armónico, geometría diferencial.
- Diversas áreas:
    - **Física:** turbulencia, teoría del campo.
    - **Ingeniería:** filtros, teoría de control, estabilidad, **sísmica.**
    - **Biología:** dinámica de poblaciones
    - **Economía:** finanzas

# Análisis Estocástico 1950-2000: Aplicaciones

- Matemáticas: Ecuaciones dif. parciales, teoría de potencial, análisis armónico, geometría diferencial.
- Diversas áreas:
    - **Física:** turbulencia, teoría del campo.
    - **Ingeniería:** filtros, teoría de control, estabilidad, **sísmica.**
    - **Biología:** dinámica de poblaciones
    - **Economía:** finanzas
- Procesos de Lévy incrementan las aplicaciones.

# Análisis Estocástico 1950-2000: Aplicaciones

- Matemáticas: Ecuaciones dif. parciales, teoría de potencial, análisis armónico, geometría diferencial.
- Diversas áreas:
  - **Física:** turbulencia, teoría del campo.
  - **Ingeniería:** filtros, teoría de control, estabilidad, **sísmica.**
  - **Biología:** dinámica de poblaciones
  - **Economía:** finanzas
- Procesos de Lévy incrementan las aplicaciones.
  - Modelos alternativos a lo **Gaussiano**

# Análisis Estocástico 1950-2000: Aplicaciones

- Matemáticas: Ecuaciones dif. parciales, teoría de potencial, análisis armónico, geometría diferencial.
- Diversas áreas:
  - **Física:** turbulencia, teoría del campo.
  - **Ingeniería:** filtros, teoría de control, estabilidad, **sísmica.**
  - **Biología:** dinámica de poblaciones
  - **Economía:** finanzas
- Procesos de Lévy incrementan las aplicaciones.
  - Modelos alternativos a lo **Gaussiano**
  - Estructura matemática rica

- Merton y Scholes reciben **Premio Nobel de Economía** 1997 por uso de Cálculo Estocástico en finanzas (fórmula de Black-Sholes)

# Cálculo Estocástico y Finanzas

- Merton y Scholes reciben **Premio Nobel de Economía** 1997 por uso de Cálculo Estocástico en finanzas (fórmula de Black-Sholes)
- Cursos de Cálculo Estocástico en Finanzas en escuelas de negocios, economía.

- Merton y Scholes reciben **Premio Nobel de Economía** 1997 por uso de Cálculo Estocástico en finanzas (fórmula de Black-Sholes)
- Cursos de Cálculo Estocástico en Finanzas en escuelas de negocios, economía.
- Matemáticos con influencia en decisiones en bolsas de valores y bancos.

# Cálculo Estocástico y Finanzas

- Merton y Scholes reciben **Premio Nobel de Economía** 1997 por uso de Cálculo Estocástico en finanzas (fórmula de Black-Sholes)
- Cursos de Cálculo Estocástico en Finanzas en escuelas de negocios, economía.
- Matemáticos con influencia en decisiones en bolsas de valores y bancos.
- Cálculo estocástico encuentra su aplicación "natural" en finanzas, después de haberse desarrollado. *Es su lenguaje natural.*

# Cálculo Estocástico y Finanzas

- Merton y Scholes reciben **Premio Nobel de Economía** 1997 por uso de Cálculo Estocástico en finanzas (fórmula de Black-Sholes)
- Cursos de Cálculo Estocástico en Finanzas en escuelas de negocios, economía.
- Matemáticos con influencia en decisiones en bolsas de valores y bancos.
- Cálculo estocástico encuentra su aplicación "natural" en finanzas, después de haberse desarrollado. *Es su lenguaje natural.*
- Teorema Radon-Nikodym: Conexión entre mundo real y martingalas. *Cambio de espacio de probabilidad.*

- Teorema fundamental

- Teorema fundamental
- Del libro de J. Michale Steele *Stochastic Calculus and Financial Applications:*
  *Considere the general stock and bond model*

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t dB_t \text{ and } d\beta_t = r_t \beta_t dt.$$

  If *there exists a unique probability measure* $Q$ *that is equivalent to* $P$ *such that* $S_t/\beta_t$ *is a square integrable* $Q$*-martingale, and if the portfolio* $V_t = a_t S_t + b_t \beta_t$ *is self-financing, then the discounted portfolio value* $V_t/\beta_t$ *is a* $Q$*-martingale. Moreover, if* $V_t \geq 0$, *then* $V_t/\beta_t$ *is also a* $Q$*-supermartingale.*

# Otras contribuciones de Itô

1. **Integrales múltiples de Wiener-Itô**
2. Procesos de Difusión
3. Sumas de variables aleatorias independientes en espacios de Banach
4. Procesos Aditivos
5. **Análisis estocástico en espacios nucleares.**

# Resultados fundamentales

1. Fórmula de Itô
2. Integral de Itô
3. Teoría de escursiones de procesos de Markov
4. Descomposición de Lévy-Itô para procesos aditivos
5. Teorema de Itô para procesos de Lévy.
6. Teorema de Representación de Itô.
7. Lema de Itô-Nisio.
8. Teorema de Extensión de Itô.
9. Teorema de Regularización de Itô en $\mathcal{S}'$

# Presencia de Itô en Estados Unidos, Dinamarca, India, Unión Soviética

- 1954-1956: Instituto de Estudios Avanzados Princeton
- 1960: Instituto Tata en Bombay, India
- 1961-1964: Profesor de la Universidad de Stanford
- 1966-1969: Profesor de la Universidad de Aarhus
- 1969-1975: Profesor de la Universidad de Cornell
- Simposios de Probabilidad Japon-Unión Soviética (1982)
- 1985-1986: Universidad de Minnessota (Año: Stochastic Differential Equations and Its Applications)

# Otros Premios y Reconocimientos

- 1978: Premios Azahi, Imperial y Academia Japón
- 1987: Premio Wolf, Israel
- 1991: Miembro Academia de Ciencias de Japón
- 1998: Premio Kyoto en **Investigación Básica**
- 2003: Medalla al Mérito Cultural, Japon
- 1989: Miembro, Academia de Ciencias de Francia
- 1995: Miembro, Sociedad Matemática de Moscú
- 1998: Academia Nacional de Ciencias, EUA
- 2003: Premio Itô en la revista Stochastic Processes and Their Applications

# Doctorados Honoris Causa

- 1981: Universidad París VI, Francia

# Doctorados Honoris Causa

- 1981: Universidad París VI, Francia
- 1987: ETH, Zurich, Suiza

# Doctorados Honoris Causa

- 1981: Universidad París VI, Francia
- 1987: ETH, Zurich, Suiza
- 1992: Universidad de Warwick, Inglaterra

# Comentarios Finales

1. Ejemplo de exposición académica y claridad
2. Búsqueda del rigor y formulación abstracta
3. Simplicidad y sencillez
4. Resultados básicos y contribuciones seminales
5. Cultura matemática amplia
6. Martingalas aparecen por todos lados
7. Influencia en muchos Probabilistas
8. Influencia personal

# Influencia Personal

- 1985: Tesis doctoral: Integrales estocásticas múltiples de Wiener-Itô vía medidas producto y extensiones a espacios nucleares
- 1986: Estancia posdoctoral en Minnessota y comida china.
  - Primer artículo
  - Ecuaciones de Langevin (evolución) con respecto a martingalas en $\mathcal{S}'$
  - Línea investigación **procesos estocásticos en** $S'$
- Workshop on **Multiple Wiener-Itô Integrals** (1992)
  - Línea de investigación en MWI
  - Edición de libro
- Regularización de Procesos aditivos en $\mathcal{S}'$
  - Itô (1984): Continuos
  - PA-Rocha Arteaga-Tudor (2005): Generales

# Premio Gauss 2006 a Kyosi Itô

- *For laying the foundations of the Theory of Stochastic Differential Equations and Stochatic Analysis. Itô's work has emerged as one of the major mathematical innovations of the 20th century and has found a wide range of applications outside mathematics. Itô calculus has become a key tool in areas such as engineering, physics and biology. It is at present of particular importance in economics and finance with option pricing as a prime example.*

# Premio Gauss 2006 a Kyosi Itô

- *For laying the foundations of the Theory of Stochastic Differential Equations and Stochatic Analysis. Itô's work has emerged as one of the major mathematical innovations of the 20th century and has found a wide range of applications outside mathematics. Itô calculus has become a key tool in areas such as engineering, physics and biology. It is at present of particular importance in economics and finance with option pricing as a prime example.*
- **Itô**: *Because my own research on stochastic analysis is pure mathematics, the fact that my work has been chosen for the Gauss Prize for applications of mathematics is truly unexpected and deeply gratifying. I hope therefore to share this great honor with my family, teachers, colleagues, and students in mathematics, as well as with all those who work on stochastic analysis and extended it to areas far beyond my imagination.*

# Premio Gauss 2006 a Kyosi Itô

- *For laying the foundations of the Theory of Stochastic Differential Equations and Stochatic Analysis. Itô's work has emerged as one of the major mathematical innovations of the 20th century and has found a wide range of applications outside mathematics. Itô calculus has become a key tool in areas such as engineering, physics and biology. It is at present of particular importance in economics and finance with option pricing as a prime example.*
- **Itô**: *Because my own research on stochastic analysis is pure mathematics, the fact that my work has been chosen for the Gauss Prize for applications of mathematics is truly unexpected and deeply gratifying. I hope therefore to share this great honor with my family, teachers, colleagues, and students in mathematics, as well as with all those who work on stochastic analysis and extended it to areas far beyond my imagination.*
- **Itô**: **Matemáticas y Música**